

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ

П. З. Луговой, докт. техн. наук, В. Ф. Мейш, докт. физ.-мат. наук, К. Г. Головки, инж. (Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины)

Проведено чисельне моделювання динамічної поведінки підкріпленої циліндричної оболонки на пружній основі. Реакція основи описується згідно з моделлю Вінклера. Для визначення коефіцієнта жорсткості пружної основи розв'язується зв'язана динамічна задача гладка циліндрична оболонка–грунтове середовище. Грунт моделюється нелінійним трикомпонентним середовищем. Виходячи з аналізу параметрів, отриманих при розв'язанні зв'язаної задачі, розглянуто хвильові процеси в підкріплених оболонках на пружній основі.

Задачу о взаимодействии оболочечных конструкций с окружающей средой можно условно разделить на две стадии:

- а) колебания конструкции при заданной нагрузке с учетом влияния среды;*
- б) волновые процессы в среде и определение сил реакции на конструкцию.*

Такой подход требует решения связанных задач теории оболочек и механики сплошных сред, что приводит к определенным сложностям как в постановке, так и в численном решении.

Более простой подход состоит в использовании моделей оболочек на упругом основании (модель Винклера, модель Пастернака и т.д.) [1]. Указанный подход получил широкое распространение при рассмотрении задач статики [1]. Коэффициент жесткости упругого основания определяется из решения статических задач действия штампа на полупространство и некоторых экспериментальных данных. В настоящее время имеется ограниченное число работ по динамическому поведению конструкций на упругом основании, в частности о вынужденных колебаниях при импульсных нагрузках. В работах [2, 3] рассмотрены вынужденные колебания цилиндрических и сферических гладких оболочек при нестационарных нагрузках.

В связи с этим численное исследование волновых процессов в подкрепленных цилиндрических оболочках конечной длины на упругом основании и определение коэффициента жесткости основания исходя из результатов решения связанной задачи представляет как научный, так и практический интерес.

1. Рассматривается изотропная подкрепленная цилиндрическая оболочка с учетом дискретного расположения ребер, находящаяся в упругой среде, которая моделируется упругим основанием модели Винклера [4].

Предполагается, что на оболочку действует внутренняя нормальная импульсная нагрузка.

Динамическое поведение дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки описывается уравнениями колебаний теории оболочек и стержней типа Тимошенко [5] с учетом слагаемых, моделирующих упругое основание. При выводе уравнений колебаний использовался геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко в квадратичном приближении. Исходные уравнения колебаний неоднородной оболочечной структуры имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \right) \Bigg|_{x=x_j} ; \\ \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} - \sum_{j=1}^J \frac{T_{22j}}{R_j} \Bigg|_{x=x_j} - c_w u_3 + P_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \Bigg|_{x=x_j} ; \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \right] \Bigg|_{x=x_j} ; \\ \bar{T}_{13} &= T_{13} + T_{11} \Theta_1 ; \quad h_{cj} = 0,5(h + h_j). \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения: u_1, u_3, Φ_1 – компоненты обобщенного вектора перемещений; ρ – плотность материала оболочки и ребер; h, h_j, F_j, I_{crj} – геометрические параметры оболочки и ребер; R – радиус срединной поверхности оболочки; R_j – радиус j -го кольца относительно центра тяжести его поперечного сечения; x, t – пространственная и временная координаты; c_w – коэффициент постели; x_j – линии сопряжения оболочка–подкрепляющее кольцо; $P_3(x, t)$ – нагрузка.

Связь между величинами усилий-моментов и соответствующих деформаций определяется согласно формулам

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); & T_{22} &= B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \\ T_{13} &= B_{13} k^2 \varepsilon_{13}; & M_{11} &= D_{11} \kappa_{11}; & T_{22j} &= B_{22j} \varepsilon_{22j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & B_{11} &= B_{22}, & B_{13} &= Gh; \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & B_{22j} &= EF_j; \end{aligned}$$

E, G, ν – физико-механические параметры материала оболочки и ребер.

Величины деформаций в формулах (2) выражаются через компоненты обобщенного вектора перемещений по формулам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \Theta_1^2; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_3}{R}; \quad \varepsilon_{13} = \Phi_1 + \Theta_1; \quad (3)$$

$$\Theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.$$

Уравнения колебаний (1)–(3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В частности, для случая жестко заземленных краев цилиндрической оболочки при $x = 0$, $x = L$ имеем граничные условия

$$u_1 = u_3 = \Phi_1 = 0 \quad (4)$$

и начальные условия при $t = 0$

$$u_1 = u_3 = \Phi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

2. Для определения коэффициента жесткости основания (модель Винклера) предлагается следующий подход. Рассматривается процесс деформирования бесконечно длинной тонкой цилиндрической оболочки в грунтовой среде при внутренней импульсной нагрузке.

Движение грунтовой среды описывается системой уравнений в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(\rho V^2 + P) - \frac{1}{r} P \right] = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho V)] = 0,$$

где r и t – пространственная и временная координаты; V – скорость; ρ – плотность; P – давление.

Уравнение состояния грунтовой среды принимается согласно модели нелинейной жидкой многокомпонентной среды [6, 7]:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}; \quad (7)$$

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_{i0}, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1,$$

где величины с индексами 1, 2 и 3 относятся соответственно к воздуху, воде и твердому компоненту; α_i – содержание компонентов по объему; γ_i – показатели изэнтроп в газообразном, жидком и твердой компонентах среды; c_{i0} – скорость

звука в соответствующих компонентах среды при атмосферном давлении P_0 ; ρ_{i0} – плотности компонентов среды.

Скорость звука при давлении P_1 определяется из условия $c = (dp/d\rho)^{1/2}$ и имеет вид

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}}{\left\{ \rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right\}^{1/2}}. \quad (8)$$

Уравнения движения тонкой оболочки радиусом R и толщиной h имеет вид

$$\rho_{об} h \ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t), \quad (9)$$

где $P_3(t)$ – нагрузка на внутреннюю часть оболочки; $P_r(t)$ – давление грунта на оболочку; u_3 – радиальное перемещение оболочки; $\rho_{об}$, E , ν – физико-механические параметры материала оболочки.

Связанность задачи взаимодействия обеспечивается заданием условия непротекания на деформируемой поверхности контакта оболочка–грунтовая среда

$$\dot{u}_3 = V_r, \quad (10)$$

где V_r – скорость границы грунтовой среды.

В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимаются уравнения (9), (10) и условия невозмущенного движения на бесконечности.

Как частный случай уравнений (1)–(3) рассматривалась бесконечная цилиндрическая оболочка на упругом основании при действии импульсной внутренней нагрузки $P_3(t)$. Уравнения колебаний в этом случае имеют вид

$$-\frac{T_{22}}{R} - c_w u_3 + P_3(t) = \rho h \ddot{u}_3. \quad (11)$$

Целью проведения расчетов согласно уравнениям (11) было максимально возможное равенство прогибов u_3 оболочки с расчетами по уравнениям (6)–(10). Сравнение проводилось следующим образом. Исходя из уравнений вида (9) и (11), можно получить формулу для коэффициентов Винклера c_w в случае каждого конкретного варианта колебаний системы оболочка–среда

$$c_w = \frac{\max P_0}{u_3(t^*)}, \quad (12)$$

где величины $P_0(t)$, $u_3(t)$ определяются из решения задачи (6)–(10); t^* – время достижения $\max P_0(t)$. Учитывая, что полного совпадения результатов по двум моделям достичь невозможно, критерием достоверности было принято максимально возможное совпадение величины u_3 в первый период колебаний.

3. Численный алгоритм решения задачи о колебании цилиндрической оболочки на упругом основании (уравнения (1)–(3)) основан на конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений с использованием интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственной координате и явной конечно-разностной схеме по временной координате [8]. Подробно алгоритм изложен в монографии [5].

Алгоритм решения задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой средой (уравнения (6)–(10)) основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [9]. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака является явной, при расчетах использовалось условие устойчивости

$$(|V| + c)\tau / \Delta r < 1 ,$$

где величина c соответствует локальной скорости звука (8).

4. Рассматривалась подкрепленная цилиндрическая оболочка с жестко защемленными краями (граничные условия (4)) при действии распределенной внутренней нагрузки

$$P_3(t) = A[\eta(t) - \eta(t - T)] ,$$

где A и T – амплитуда и длительность нагрузки.

Задача решалась при следующих физико-механических и геометрических параметрах: $L/h=80$; $R/h=10$; $E=7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $A=10^6$ Па; $T=50 \cdot 10^{-6}$ с. Предполагается, что оболочка подкреплена тремя ребрами в точках $x_j = jL/4$ ($j=1, 3$).

Коэффициент постели согласно формуле (12) полагался $c_w = 3,25 \cdot 10^{10}$ Н/м³. Этот случай соответствует водонасыщенному грунту со следующими параметрами ($\alpha_1 = 0,01$; $\alpha_2 = 0,39$; $\alpha_3 = 0,6$):

1) воздух – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$;

2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$;

3) твердый компонент – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

Ниже приведены характерные зависимости величин u_3 (рис. 1) и σ_{22} (рис. 2) по пространственной координате x в момент времени $t = 5,5T$ (кривые 1) и $t = 6,5T$ (кривые 2). Как следует из полученных результатов и приведенных графиков, учет упругого основания при указанных исходных данных влечет за собой не только изменение частотных характеристик (частота колебаний оболочки с учетом основания повышается), но и амплитудных характеристик. Разница по максимальным значениям прогиба u_3 и напряжения σ_{22} достигает порядка 50–70%. Для обоих случаев расчетов четко проявляется

влияние дискретных подкрепляющих элементов на параметры напряженно-деформируемого состояния исходной конструкции.

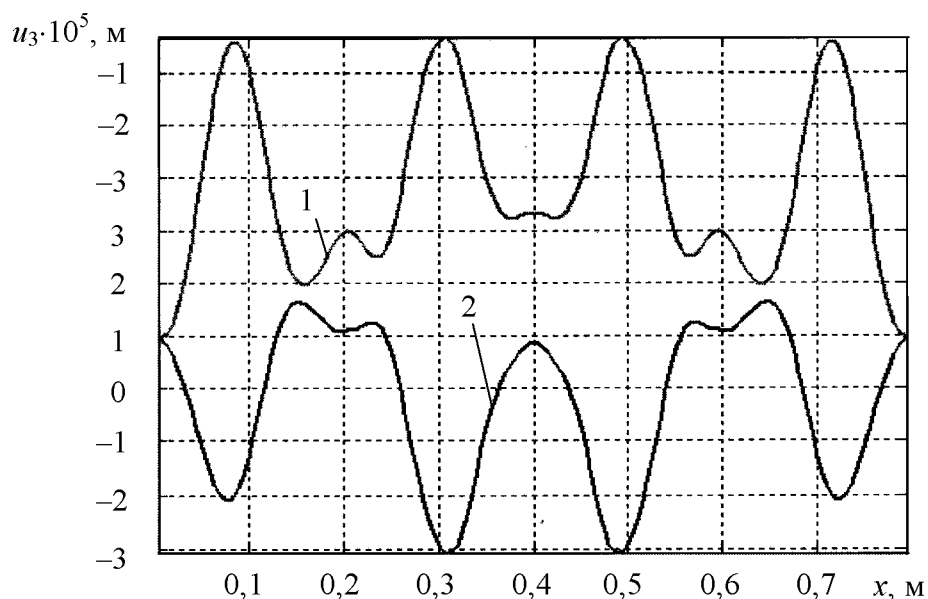


Рис. 1. Зависимость величины u_3 от пространственной координаты x

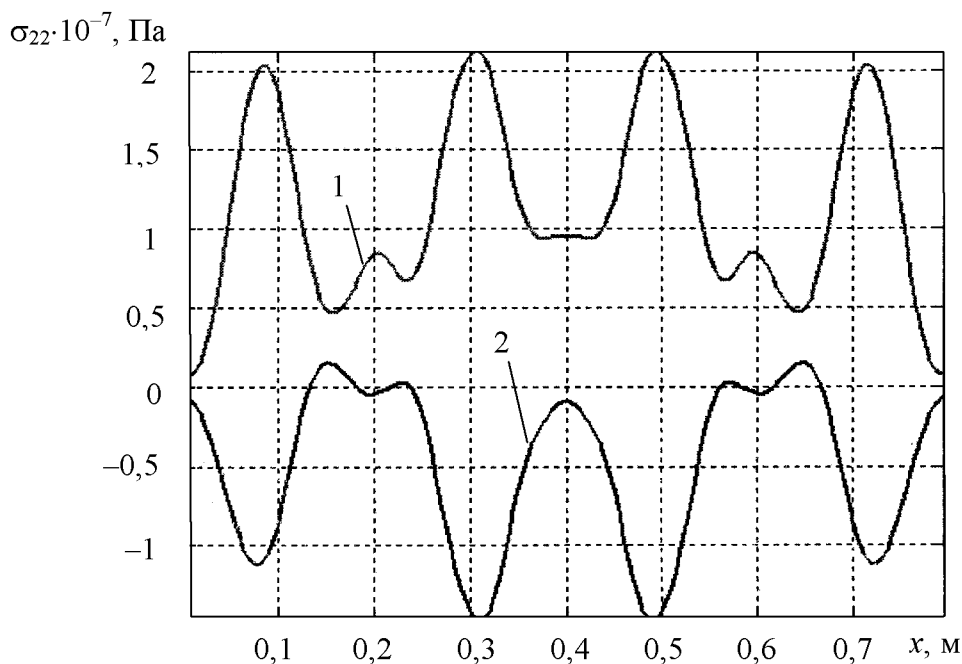


Рис. 2. Зависимость величины σ_{22} от пространственной координаты x

Выводы

В данной работе представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки с учетом дискретного размещения ребер и упругого основания типа Винклера. Для определения коэффициента жесткости основания используется методика, основанная на решении связанной задачи оболочка–грунтовая среда. На основании развитого численного метода

приведены числовые результаты динамического поведения исходной неоднородной конструкции при внутренней импульсной нагрузке.

1. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – К.: Сталь, 2000. – 600 с.
2. *Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воропай, А. С. Шарапата.* – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. *Кохманюк С. С., Дмитриев А. С., Шелудько Г. А. и др.* Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок. – К.: Наук. думка, 1989. – 304 с.
4. *Головко К. Г., Луговой П. З., Мейш В. Ф.* К решению динамических задач теории подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании типа Винклера при импульсных нагрузках // Системні технології: Математичні проблеми технічної механіки. – № 4(45). – 2006. – С. 3–7.
5. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2005. – 536 с.
6. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
7. *Лучко И. А., Плаксий В. А., Ремез Н. С. и др.* Механический эффект взрыва в грунтах. – К.: Наук. думка, 1989. – 232 с.
8. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. – Т. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.