

ПРО РОЗРАХУНОК БАЛКИ ПІД ДІАФРАГМОЮ ПРИ РАПТОВО ПРИКЛАДНОМУ ВИБУХОВОМУ ІМПУЛЬСІ

С. І. Азаров, докт. техн. наук., Г. А. Сорокін, асп. (Інститут ядерних досліджень НАН України), В. Л. Сидоренко, інж. (Інститут державного управління у сфері цивільного захисту УЦЗ України)

Смоделирована деформация балки при ударном влиянии (нагрузке) методом Фурье в системе MathCAD и методом конечных разностей в системе MATLAB 7. Разработана программа, с помощью которой можно построить графики перемещения и нормального напряжения. Полученные результаты исследований носят прикладной характер, так как данную разработку можно использовать при моделировании деформации строительных конструкций.

Постановка проблеми. При видобутку вугілля підземним способом існує небезпека виникнення аварії з вибухом метано-повітряної суміші або вугільного пилу [1]. Для запобігання розвитку і поширення аварії по довжині штольні вибухонебезпечну ділянку розділяють на секції за допомогою діафрагми, під яку укладають фундаментну балку.

Під час аварії балка з діафрагмою може зазнавати впливу раптово прикладеного вибухового імпульсу, що спричиняє швидке наростання деформації, яка істотно впливає на надійність конструкції. Аварійний вибух і викликаний ним імпульс тиску надає руху системі балка–діафрагма і може викликати її руйнування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Результати досліджень вчених про несучу здатність балки наведено у публікаціях [2, 3]. Однак питанню змушених поперечних коливань балки при вибухових (імпульсних) навантаженнях з урахуванням сил опору приділяється мало уваги.

Постановка задачі та її розв’язання. Метою дослідження є розв’язання задачі про несучу здатність балки при імпульсному навантаженні із застосуванням синус-перетворення Фур’є із скінченними границями та методу скінченних різниць (МСР), який є одним з найбільш простих методів розв’язання крайових задач.

Розрахунки показали [4], що при вибуху побутового газу у будівлі за умови, що відстань від джерела вибуху до балки дорівнює 1 м, максимальний надлишковий тиск у вибуховій хвилі становить 25 кПа через $7,5 \cdot 10^{-3}$ с після вибуху. Від дії вибуху конструкції будівлі зазнають не тільки загального зміщення (як тверде тіло), а й вигину (як вільна пружна балка). Максимальне позитивне прискорення балки від впливу вибухового збурення

$$B = \frac{\Delta P_{\max}}{\rho C_0 \tau} \approx 7 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2, \quad (1)$$

де ΔP_{\max} – надлишковий тиск; ρ – щільність матеріалу балки; C_0 – швидкість

звуку; τ – тривалість дії ударної хвилі на балку.

Внаслідок описаних вище ефектів будівельна балка зазнала впливу динамічного навантаження (рис. 1).

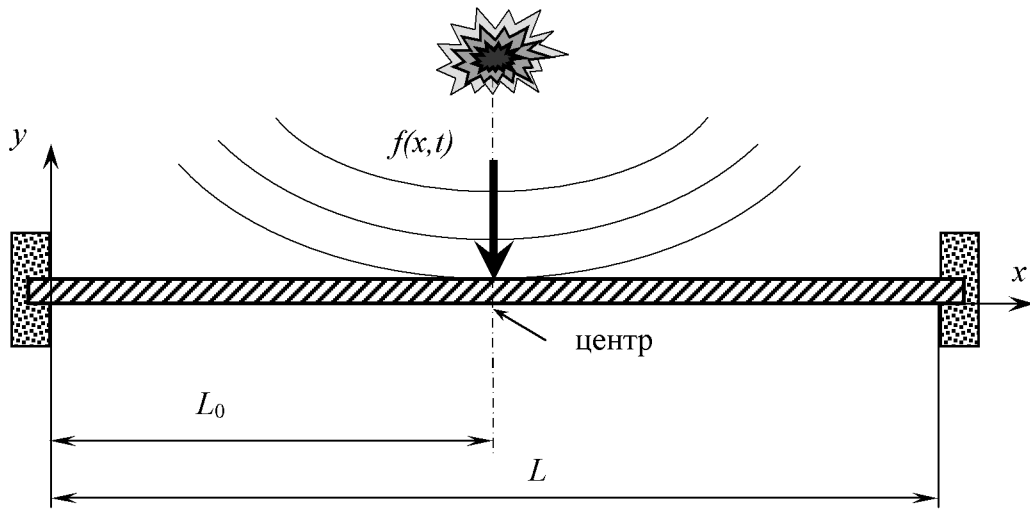


Рис. 1. Розрахункова схема балки при імпульсному ударі

Точне рішення (метод Фур'є). Диференціальне рівняння поперечних коливань балки з урахуванням сил опору, пропорційних швидкості, має вигляд [4]

$$\frac{mS}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + L_0 \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t), \quad (2)$$

де y – зміщення балки; EJ – жорсткість при вигині; m – вага одиниці об'єму матеріалу балки; L_0 – відстань від місця імпульсного удару до балки; S – площа поперечного перерізу; g – прискорення сили ваги; $f(x, t)$ – інтенсивність розподіленого навантаження.

Для рівняння (2) необхідно ще додати початкові і граничні умови.

Початкові умови:

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x^2} = 0, \quad \text{якщо } t = 0, 0 \leq x \leq L. \quad (3)$$

Граничні умови:

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t} = 0, \quad \text{якщо } x = 0, x = L, t > 0. \quad (4)$$

Застосуємо до рівняння (2) синус-перетворення Фур'є із скінченними границями за змінною x [6].

У випадку розв'язання рівняння (2) методом Фур'є з урахуванням початкових (3) та граничних (4) умов вертикальне зміщення y записується у формі [7]

$$y(x,t) = \frac{K\Delta P_{\max}}{LP^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi L_0}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin(\omega t - a_n)}{\left[\left(n^4 - \frac{\omega^2}{\rho^2}\right)^2 + 4 \frac{L_0 g}{mS} \frac{\omega^2}{\rho^4}\right]^{1/2}}. \quad (5)$$

Тут

$$\rho = 4\pi \left(\frac{EJg}{4mSL^2} \right); \quad (6)$$

$$K = \frac{g}{mS}, \quad (7)$$

де ω – частота коливань; a_n – кут зсуву фаз.

Величину $y_{\max}^{\text{ст}}(x)$ (прогин балки від сили $K\Delta P_{\max}$) визначають за формулою

$$y_{\max}^{\text{ст}}(x) = \begin{cases} \frac{K\Delta P_{\max} L_0 x}{6EJL} (L^2 - L_0^2 - x^2), & 0 \leq x \leq L_0 \\ \frac{K\Delta P_{\max}}{6EJL} \left[\frac{L_1}{L} (L^2 - L_1^2 - x^2) + (x - L_0)^3 \right], & L_0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (8)$$

де $L_1 = L - L_0$.

Після визначення зміщення балки можна записати згинальний момент

$$M(x,t) = -EJ \frac{y(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{2K\Delta P_{\max} L}{\pi^2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{n\pi L_0}{2L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \sin(\omega t - a_n)}{\left[\left(n^2 - \frac{\omega^2}{\rho^2}\right)^2 + 4 \frac{L_0 g}{mS} \frac{\omega^2}{\rho^4}\right]^{1/2}}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (9)$$

Згинальний момент від статично прикладеної сили

$$M_{\max}^{\text{ст}}(x) = \begin{cases} \frac{K\Delta P_{\max} L_1 x}{L}, & 0 \leq x \leq L_0 \\ \frac{K\Delta P_{\max} L_0}{L} (L - x), & L_0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (10)$$

Метод скінченних різниць. Для балки постійного поперечного перерізу (див. рис. 1) диференціальне рівняння поперечних коливань з урахуванням сил опору, пропорційних швидкості при ударному навантаженні по центру балки, можна подати у такій формі [5]:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + A_0 L_0 \frac{\partial y}{\partial t} + A_0 E J \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = A_0 P(x, t) \quad (11)$$

де
$$A_0 = \frac{g_0}{S_i \gamma_0}; \quad (12)$$

EJ – жорсткість при зіткненні, кНм; $2L_0$ – довжина балки, м; S_0 – площа поперечного перерізу, м²; γ_0 – вага одиниці об'єму балки, кг/м³; E – модуль пружності; g_0 – прискорення сили, м²/с; J – момент інерції; $P(x, t)$ – інтенсивність ударного навантаження, кН/м; y – переміщення балки; x – координати перерізу балки в горизонтальному напрямку.

При використанні МСР диференціальне рівняння у частинних похідних (11) запишеться у вигляді [8]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau^2} (y_{t+1,x} - 2y_{t,x} + y_{t-1,x}) + A_0 (y_{t+1,x} + y_{t-1,x}) + A_0 E J \times \\ & \times (y_{t+2,x} - 4y_{t,x+1} + 6y_{t,x} - 4y_{t,x-1} + y_{t,x-2}) = A_0 P(x, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Граничні умови:

$$y_{t,0} = 0, \quad y_{t,L_0} = 0; \quad (14)$$

$$\frac{1}{h^2} (y_{t,0+h} - 2y_{t,L_0} - y_{t,0-h}) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{h^2} (y_{t,L_0+h} - 2y_{t,L_0} + y_{t,L_0-h}) = 0, \quad (16)$$

де $x = 0, L_0$; h – крок інтегрування у горизонтальному положенні; $t = 0 \dots T$; τ – крок інтегрування за часом.

Початкові умови:

$$\begin{aligned} & y_{0,x} = 0; \\ & (y_{\tau,x} - y_{0,x}) / \tau = V_0, \end{aligned} \quad (17)$$

де $x = 0 \dots L_0$.

Результати досліджень. Моделювання деформації балки із застосуванням метода Фур'є здійснювалося програмою MathCAD, МСР був реалізований за допомогою програми MATLAB 7 [9]. Кількість точок при реалізації МСР – 100, крок за часом $\tau = 10^{-6}$ с, час від початку імпульсного удару $t = 9,0 \cdot 10^{-5}$ с.

Експериментальні дані по вертикальному переміщенню балки бралися з роботи [10]. Випробувалась одноставова двотаврова балка довжиною 3,6 м з двома нерухомими шарнірами. Балка виконана з прокатного двотавра № 10 із сталі марки ВспЗкп. Модуль пружності $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Балка навантажувалась зосередженою силою 5 та 15 кН в середині прольоту. Результати порівняння представлені на рис. 2. З графіка випливає, що дані, отримані із застосуванням методу Фур'є, відрізняються від даних МСР на 5–8 %.

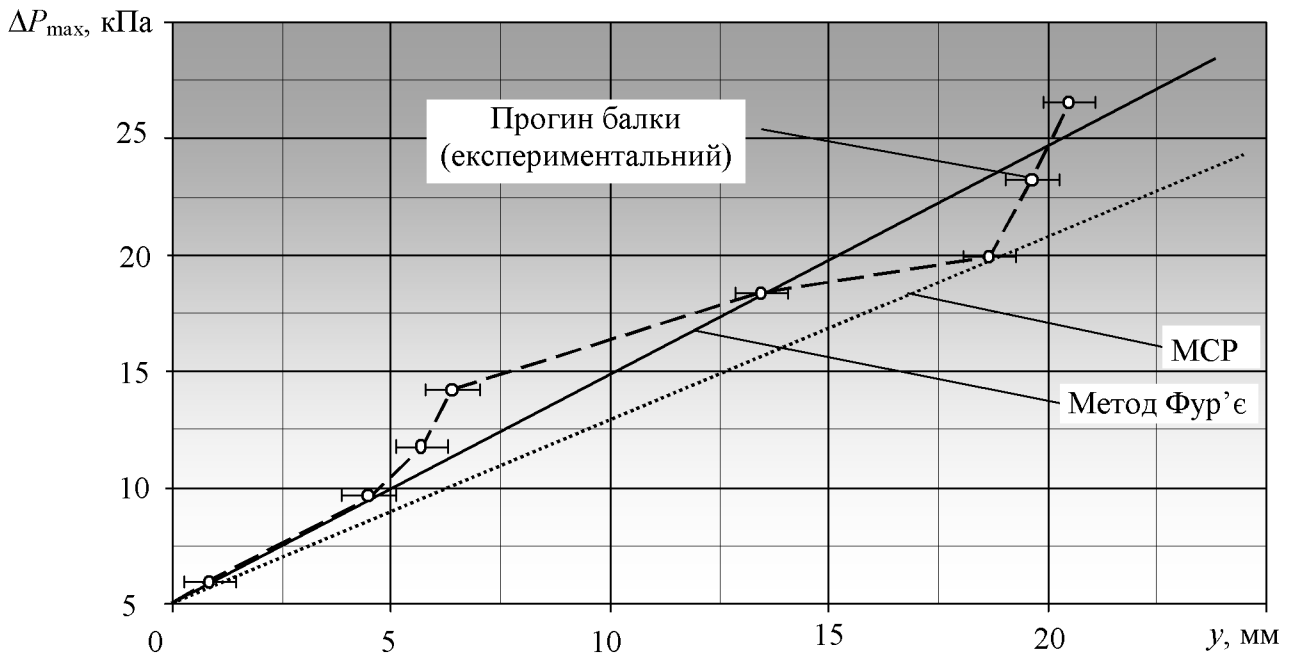


Рис. 2. Залежність прогинів досліджуваної балки від величин навантаження по центру прольоту

Динаміка зміни характеру деформації балки по довжині при вибуховому навантаженні показана на рис. 3. Розрахунок проводився для двотаврової балки довжиною $L=2$ м і щільністю $\rho = 7800$ кг/м³ з модулем пружності $E = 2 \cdot 10^4$ Н/м² при надлишковому тиску $\Delta P = 30$ кПа. Результати випробувань теж збігаються з теоретичними розрахунками (метод Фур'є та МСР).

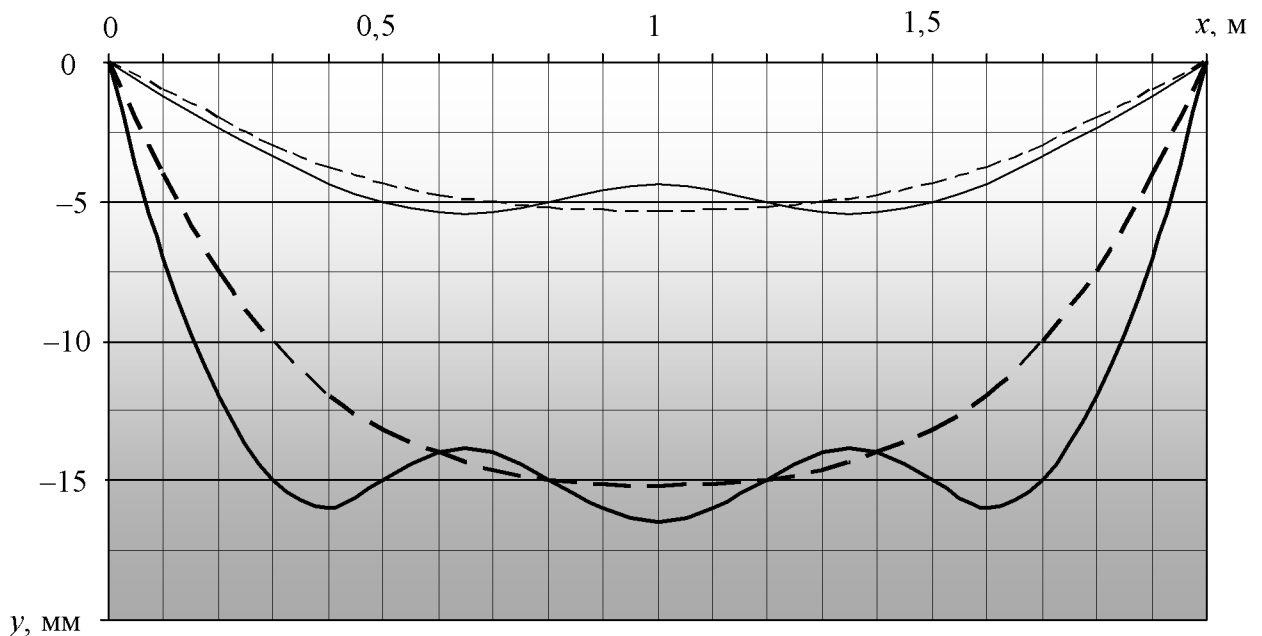


Рис. 3. Динаміка зміни прогину балки від стрибка тиску: суцільні лінії – метод Фур'є; штрихові – МСР; тонкі – $\tau = 0,007$ с; товсті – $\tau = 0,03$ с

Висновки. Отримано розв'язок задачі про зміщення балки при імпульсному динамічному навантаженні з урахуванням сил опору. Виконано порівняння прогину балки, отриманого розрахунковими та експериментальними методами. Зіставлення отриманих даних свідчить про те, що розрахунок прогину балки методом Фур'є є більш точним, але більш складним порівняно з МСР.

1. *Азаров С. И., Сорокин Г. А.* Моделирование параметров аварийного взрыва метана в шахте // Уголь Украины. – 2004. – № 6. – С. 44–46.
2. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. – М.: Гостехтеорлитература, 1950. – 368 с.
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 449 с.
4. *Азаров С. И., Сорокин Г. А.* Чисельний розрахунок області вибуху метану в гірничій виробці шахти // Вісник НТУУ „КПІ”. Серія „Гірництво”. Зб. наук. праць. – К.: 2004. – Вип. 10. – С. 142–146.
5. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 507 с.
6. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1955. – 667 с.
7. *Бабакев И. М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
8. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1957. – 542 с.
9. *Курбанова Е. Л.* MATLAB7: Самоучитель. – М.: Диалектика, 2006. – 249 с.
10. *Гоголь М. В., Гаїда О. М.* Експериментальне дослідження роботи балкових конструкцій з регулюванням зусиль // Вісник Національного університету „Львівська політехніка”. Теорія і практика будівництва. – Львів, 2005. – № 545. – С. 36–41.