ГІРНИЧІ МАШИНИ ТА ОБЛАДНАННЯ

УДК 621.01

ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИКИ ТА ДИНАМІКИ МЕХАНІЗМІВ ЗАСОБАМИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

І. М. Мацюк, канд. техн. наук (Національний гірничий університет)

Рассмотрен метод решения задач кинематики и динамики плоских механизмов второго класса в среде Mathcad.

Ключевые слова: векторная алгебра, динамика, кинематика, механизмы, средства.

Розглянуто метод розв'язання задач кінематики та динаміки плоских механізмів другого класу у середовищі Mathcad.

Ключові слова: векторна алгебра, динаміка, кінематика, механізми, засоби.

The method of solving kinematics and dynamics problems of the second class planar mechanisms in Mathcad environment is investigated.

Key words: vector algebra, dynamics, kinematics, mechanisms, and means.

Задачі кінематики та динаміки механізмів можуть бути розв'язані різними методами, серед яких методи, що ґрунтуються на графічних побудовах і виключно аналітичні. Оскільки кінематичні та динамічні параметри механічних систем суть величини векторні, то найбільш логічним для їхнього дослідження є використання апарату векторної алгебри.

Графічний метод планів має векторну основу і широке застосування. Він передбачає побудову векторних багатокутників (які називаються планами) швидкостей, прискорень та сил для розв'язання відповідних векторних рівнянь. Переваги і недоліки цього методу загальновідомі. До перших відносять його простоту та наочність. До других – недостатню точність розв'язання і низьку продуктивність. Точність цього методу може бути істотно збільшена за рахунок використання сучасних комп'ютерних програмних графічних продуктів [1].

Аналітичні методи ґрунтуються або на диференціальних залежностях між параметрами (переміщення, швидкості, прискорення), або на безпосередньому чисельному розв'язанні рівнянь руху механізмів за допомогою комп'ютерів. Зручним інструментом для цього є продукт компанії Mathsoft математичний пакет Mathcad. Застосування подібних методів відоме і викладене, наприклад, у [2, 3].

Однак безпосереднє розв'язання векторних рівнянь кінематики та динаміки механізмів у програмі Mathcad викликає необхідність застосування певних прийомів. Ідея цих прийомів викладена на прикладі найпростіших механізмів у [4].

У цій статті узагальнюється підхід до розв’язання задач кінематики та динаміки плоских механізмів другого класу в середовищі Mathcad.

Розглянемо задачу визначення швидкості та прискорення точки *B* структурної групи другого класу при заданих векторах швидкостей точок *A* и *C* (рис. 1, а). Як відомо [5], вона розв’язується за допомогою системи векторних рівнянь

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} \text{ і } \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{v}_C$ – вектори абсолютних швидкостей відповідних точок; $\boldsymbol{v}_{BA}, \boldsymbol{v}_{BC}$ – вектори відносних швидкостей.

Графічно ця задача розв’язується зазвичай методом планів. Прирівнюючи праві частини рівнянь (1), одержують векторне рівняння, у якому невідомими будуть модулі векторів $\boldsymbol{v}_{BA}$ і $\boldsymbol{v}_{BC}$. Для розв’язання рівняння в Mathcad необхідно ці вектори направити перпендикулярно відрізкам *AB* і *BC* відповідно.

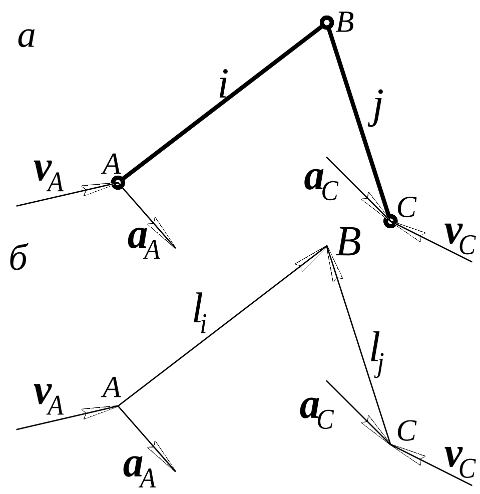

Рис. 1. Схема до кінематичного аналізу структурних груп другого класу

Представимо ланки *AB* і *BC* у вигляді векторів $\boldsymbol{l}_i$ і $\boldsymbol{l}_j$ (рис. 1, *б*). В Mathcad ці вектори можна представити, як

$$\boldsymbol{l}_i := \begin{pmatrix} l_{i_0} \\ l_{i_1} \\ l_{i_2} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{l}_j := \begin{pmatrix} l_{j_0} \\ l_{j_1} \\ l_{j_2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

або в більш компактній формі

$$\boldsymbol{l_i} := \left(l_{i_0}\, l_{i_1}\, l_{i_2}\right)^T; \quad \boldsymbol{l_j} := \left(l_{j_0}\, l_{j_1}\, l_{j_2}\right)^T.$$

Нижніми індексами 0, 1 і 2 позначені відповідно абсциси, ординати та аплікати векторів. Для плоских механізмів аплікати векторів (2) дорівнюють нулю:

$$\boldsymbol{l_i} := \left(l_{i_0}\; l_{i_1}\; 0\right)^T; \quad \boldsymbol{l_j} := \left(l_{j_0}\; l_{j_1}\; 0\right)^T.$$

З урахуванням цього вектори $\boldsymbol{v}_{BA}$ і $\boldsymbol{v}_{BC}$, перпендикулярні відповідно векторам $\boldsymbol{l_i}$ і $\boldsymbol{l_j}$, мають вигляд

$$\boldsymbol{v}_{BA_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} 0\right)^T; \boldsymbol{v}_{BC_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{j_0}}{l_{j_1}} 0\right)^T. \tag{3}$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (1)

$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} 0\right)^T = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{j_0}}{l_{j_1}} 0\right)^T. \tag{4}$$

Векторне рівняння (4) має два невідомих скаляри v_{BA_0} й v_{BC_0} і може бути легко розв'язане за допомогою обчислювального блоку Given-Find. Після розв'язання рівняння (4) одержують шукані вектори:

$$\boldsymbol{v}_{BA} := \boldsymbol{v}_{BA_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} 0\right)^T; \boldsymbol{v}_{BC} := \boldsymbol{v}_{BC_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{j_0}}{l_{j_1}} 0\right)^T.$$

Вектор швидкості точки B знаходять, використовуючи один з векторних виразів

$$\boldsymbol{v}_B := \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}; \boldsymbol{v}_B := \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{BC}.$$

Кутові швидкості ланок знаходять також за допомогою блоку Given-Find як векторні добутки відповідних векторів:

$$\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega_i} \times \boldsymbol{l_i}; \boldsymbol{v}_{BC} = \boldsymbol{\omega_j} \times \boldsymbol{l_j};$$

Розв'язок отримують у вигляді векторів

$$\boldsymbol{\omega_i} := (0\; 0\; \boldsymbol{\omega_i})^T; \quad \boldsymbol{\omega_j} := (0\; 0\; \boldsymbol{\omega_j})^T.$$

Знак аплікати визначає напрямок відповідної кутової швидкості.

Аналогічно можна визначити вектор прискорення точки B при заданих векторах $\boldsymbol{a}_A$ і $\boldsymbol{a}_C$ (рис. 1, *а*). Відповідне векторне рівняння виглядає так:

$$\boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BAn} + \boldsymbol{a}_{BA\tau_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} 0\right)^T = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BCn} + \boldsymbol{a}_{BC\tau_0} \cdot \left(1 - \frac{l_{j_0}}{l_{j_1}} 0\right)^T. \tag{5}$$

У рівнянні (5) $\boldsymbol{a}_{BAn}$ і $\boldsymbol{a}_{BCn}$ – нормальні складові відносних прискорень $\boldsymbol{a}_{BA}$ і $\boldsymbol{a}_{BC}$, а $\boldsymbol{a}_{BA\tau_0}$ і $\boldsymbol{a}_{BC\tau_0}$ – відповідно абсциси векторів тангенціальних складових, які і є невідомими в цьому рівнянні.

Нормальні складові знаходять, як

$$\boldsymbol{a}_{BAn} := \boldsymbol{\omega_i} \times \boldsymbol{v}_{BA}; \;\; \boldsymbol{a}_{BCn} := \boldsymbol{\omega_j} \times \boldsymbol{v}_{BC}.$$

Шукані тангенціальні складові знаходять, як

$$\boldsymbol{a}_{BA\tau}{:=}\boldsymbol{a}_{BA\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{l_{i_0}}{l_{i_1}} 0 \end{pmatrix}^T ; \boldsymbol{a}_{BC\tau}{:=}\boldsymbol{a}_{BC\tau_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{l_{j_0}}{l_{j_1}} 0 \end{pmatrix}^T .$$

Відносні прискорення

$$\boldsymbol{a}_{BA} := \boldsymbol{a}_{BAn} + \boldsymbol{a}_{BA\tau_0}; \boldsymbol{a}_{BC} := \boldsymbol{a}_{BCn} + \boldsymbol{a}_{BC\tau}.$$

Прискорення точки B отримують за допомогою одного з виразів

$$\boldsymbol{a}_B := \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}; \;\; \boldsymbol{a}_B := \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{BC}.$$

Кутові прискорення ланок знаходять також за допомогою блоку Given-Find з векторних рівнянь

$$\boldsymbol{a}_{BA\tau} := \boldsymbol{\varepsilon_i} \times \boldsymbol{l}_i; \;\; \boldsymbol{a}_{BCn} := \boldsymbol{\omega_j} \times \boldsymbol{l}_j.$$

Розглянемо тепер задачу визначення реакцій у кінематичних парах тієї ж групи другого класу (рис. 2). На ланку i в центрі мас s_i діють сили ваги $\boldsymbol{G_i}$ та інерції $\boldsymbol{F}_{ui}$; до ланки j в її центрі мас s_j прикладені сила $\boldsymbol{P}$, сили ваги $\boldsymbol{G_j}$ та інерції $\boldsymbol{F}_{uj}$. Необхідно визначити реакції в шарнірах A і C з боку ланок k і l відповідно, які представлені розкладанням на нормальні й тангенціальні складові.

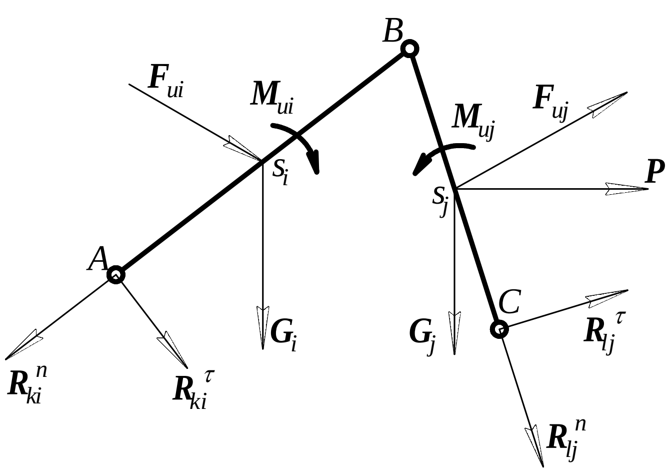

Рис. 2. Схема до динамічного аналізу структурних груп другого класу

Як і в графічному варіанті, розв’язання починають із визначення тангенціальних складових, які знаходять із векторних рівнянь рівноваги моментів сил щодо точки B. Наприклад, для ланки i рівняння має вигляд

$$\boldsymbol{M}_{ui} + \frac{-\boldsymbol{l}_i}{2}\times\boldsymbol{F}_{ui} + \frac{-\boldsymbol{l}_i}{2}\times\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{M}_{kit} = 0.$$

Із цього рівняння знаходять момент тангенціальної складової $\boldsymbol{M}_{kit}$ відносно точки B. Далі з рівняння

$$\boldsymbol{M}_{kit} = -\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{R}_{kit0}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} & 0\end{pmatrix}^T$$

за допомогою блоку Given-Find визначають абсцису $\boldsymbol{R}_{kit}$, а потім і саму тангенціальну складову $\boldsymbol{R}_{kit}$:

$$\boldsymbol{R}_{kit} := \boldsymbol{R}_{kit0}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} & 0\end{pmatrix}^T.$$

Аналогічно знаходять $\boldsymbol{R}_{lj\tau}$. Складають векторне рівняння рівноваги сил, що діють на всю групу:

$$\boldsymbol{R}_{kin0}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{l_{i_0}}{l_{i_1}} & 0\end{pmatrix}^T + \boldsymbol{R}_{kit} + \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{F}_{ui} + \boldsymbol{G}_j + \boldsymbol{F}_{uj} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}_{lj\tau} + \boldsymbol{R}_{ljn0}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{l_{j_1}}{l_{j_0}} & 0\end{pmatrix}^T.$$

Перший і останній доданки векторної суми суть нормальні складові реакцій у зовнішніх кінематичних парах групи. Їхня паралельність відрізкам AB і BC забезпечують множники $\frac{l_{i_1}}{l_{i_0}}$ і $\frac{l_{j_1}}{l_{j_0}}$.

Повні реакції в шарнірах A і C

$$\boldsymbol{R}_{ki} := \boldsymbol{R}_{kin} + \boldsymbol{R}_{kit}; \quad \boldsymbol{R}_{lj} := \boldsymbol{R}_{ljn} + \boldsymbol{R}_{lj\tau}.$$

Останньою знаходять реакцію у внутрішній кінематичній парі групи B з умови рівноваги, наприклад, ланки i:

$$\boldsymbol{R}_{ji} := -(\boldsymbol{R}_{ki} + \boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{F}_{ui})$$

Критерієм правильності виконаного дослідження може служити рівність нулю суми потужностей всіх зовнішніх сил, прикладених до групи. Потужність сили є скалярний добуток вектора сили на вектор швидкості точки її прикладання. Для розглянутого випадку

$$\boldsymbol{R}_{ki}\cdot\boldsymbol{v}_A + (\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{F}_{ui})\cdot\boldsymbol{v}_{Si} + \boldsymbol{M}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{R}_{lj}\cdot\boldsymbol{v}_C + (\boldsymbol{G}_j + \boldsymbol{F}_{ui})\cdot\boldsymbol{v}_{Sj} + \boldsymbol{M}_j\cdot\boldsymbol{\omega}_j.$$

Основними достоїнствами розглянутого аналітичного методу є:

- повна ідентичність алгоритму розв’язання з алгоритмом графічного методу;
- збереження наочності, властивої винятково графічному методу;
- використання сучасних інформаційних технологій для розв’язання конкретних задач механіки.

1. *Хлебосолов И. О.* Графоаналитические методы расчета механизмов с использованием ЭВМ / И. О. Хлебосолов // Теория механизмов и машин. – С.-Пб. – 2004. – № 2(4). – Т. 2. – С. 40–44.
2. *Златопольський Ф. Й.* Дослідження важільних механізмів з допомогою ПЕОМ / Ф. Й. Златопольський, Г. Б. Філімоніхін, В. В. Коваленко, О. Б. Чайковський: Навч. посібник. – Кіровоград: ПП «Код»,1999. – 107 с.
3. *Бертяев В.Д.* Теоретическая механика на базе Mathcad / В. Д. Бертяев: Практикум. – С.-Пб.: БХВ–Петербург, 2005. – 752 с.
4. *Зіборов К. А.* Аналіз плоского важільного механізму: Методичні вказівки до виконання домашнього завдання для студентів немеханічних спеціальностей / К. А. Зіборов, І. М. Мацюк, Е. М. Шляхов – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2007. – 40 с.
5. *Левитская О. Н.* Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский: Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1978. – 269 с.