

Висновки

1. Потужність, споживана обертачем бурового верстата, експонентно залежить від продуктивності буріння.
2. Питома енергоємність буріння для конкретної гірської породи екстремально залежить від продуктивності буріння.
3. Оптимальному значенню продуктивності буріння відповідає мінімальне значення питомої енергоємності процесу.
4. Знання оптимального значення продуктивності буріння дозволяє встановити і підтримувати значення кінематичних і силових параметрів, що забезпечують цю продуктивність, а отже й мінімум питомої енергоємності процесу.

1. *Тангаев И. А.* Энергоемкость процессов добычи и переработки полезных ископаемых. – М.: Недра, 1986. – 231 с.

2. *Тангаев И. А.* Буримость и взрываемость горных пород. – М.: Недра, 1978.

3. *Друкованый М. Ф., Кукиб Б. Н., Куц В. С.* Буровзрывные работы на карьерах. – М.: Недра, 1990. – 367 с.

УДК 624.534.142

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В КОЛЬЦЕВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КРЕПЯХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Т. Рембеляк, докт.-инж (Краковская металлургическая академия, РП)

Запропоновано методику математичного моделювання процесів поширення тепла в кільцевих кріпленнях скінченних розмірів.

Составной частью технологии, направленной на создание безопасных условий труда на горных предприятиях, является крепление подготовительных выработок. Это осуществляется с помощью основного конструктивного элемента выработки – крепи.

Под действием высокой температуры, возникающей при неожиданных эндогенных пожарах в угольных шахтах и распространяющейся по подготовительным выработкам большой протяженности, крепи могут деформироваться.

В работах [1, 3, 4] показано, что внезапное изменение температуры влечет за собой быстрое нарастание деформаций и вызывает соответствующие инерционные силы, оказывающие существенное влияние на напряженное состояние конструкций и сооружения в целом. В этом случае даже в статически определенных системах возникают внутренние усилия от действия температуры. Даже

шарнирно закрепленные элементы конструкции при внезапном неравномерном температурном воздействии приходят в движение и начинают совершать колебания. Однако в этих работах не указаны пути решения проблемы колебательного процесса в подземных конструкциях при неожиданном подземном пожаре. Цель настоящей работы – математически моделировать процессы распространения тепла при эндогенных пожарах в шахтах.

В настоящее время используются крепи различных конструкций. По форме они могут быть трапециевидными, прямоугольными, арочными, полигональными, кольцевыми и эллиптическими. По материалам крепи бывают металлические, железобетонные и деревянные. По рабочей характеристике крепь подразделяется на жесткую, податливую, шарнирную и комбинированную. При добыче каменного угля, как правило, применяют металлическую или железобетонную кольцевую крепь.

Цилиндрическая кольцевая крепь состоит из железобетонных колец, образованных из шарнирно закрепленных сегментов. При малых диаметрах колец крепь может быть бесшарнирной.

Как известно, бесшарнирная кольцевая крепь рассчитывается как статически неопределимая система. При нагружении кольца, лежащего на упругом основании, система является трижды статически неопределимой, а в общем случае пространственной нагрузки – шесть раз статически неопределимой, если не учитывать вероятность возникновения дополнительных внешних связей. Для раскрытия статической неопределимости используют уравнение перемещений. Число уравнений перемещений в каждом случае соответствует числу «лишних» неизвестных. Нагрузка на кольцо задается в виде суммы n членов ряда Фурье. В общем случае нагрузка имеет компоненты по всем трем осям координат и приложена с эксцентриситетом. Учитывая условия равновесия нагрузок, для радиальной нагрузки рассматривают только косинусоидальные

члены ряда $q_x \cos \varphi$, для касательной – только синусоидальные $q_z \sin \varphi$ (где q_{xi} , q_{zi} – составляющие по осям x и z произвольной сплошной нагрузки q ; φ – угол между составляющими).

В таком случае для всех точек на поверхности крепи произвольный член ряда представляет собой самоуравновешенную нагрузку. Полученные при этом условии формулы оказываются пригодными для синусоидальной и косинусоидальной касательных нагрузок при соответствующей замене тригонометрических функций и знаков при них на обратные.

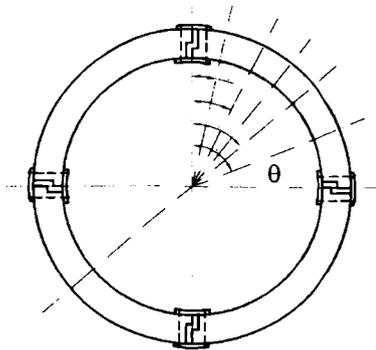


Рис. 1. Четырехшарнирная кольцевая крепь

При расчете шарнирно закрепленных (рис. 1) крепей можно также использовать тригонометрические члены ряда Фурье.

Рассмотрим задачу о распространении тепла в цилиндрической крепи конечных размеров внешним радиусом R и высотой $2h$, начальная температура которой равна $T(r, \theta, z)$, а температура наружной поверхности и основания равна нулю (рис. 2).

Задачу сводим к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где u – перемещение тепла; a – коэффициент теплопроводности крепи; r – внутренний радиус; θ – угол распространения тепла в радиальном направлении; t – время.

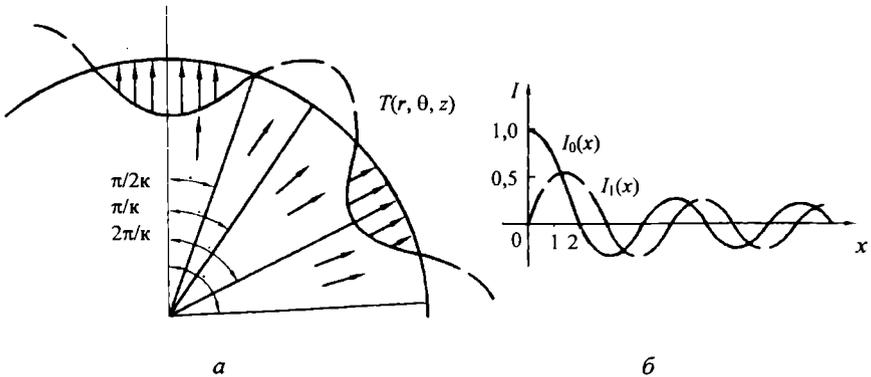


Рис. 2. Схема загрузки кольца гармоническими температурными воздействиями (а) и графики затухания функций Бесселя (б)

Примем граничные

$$u|_{z=-h} = u|_{z=h} = 0, \quad u|_{r=R} = 0 \quad (2)$$

и начальные условия

$$u|_{t=0} = T(r, \theta, z). \quad (3)$$

Применяя метод Фурье и определяя постоянные, вводимые этим методом, через граничные условия, получим следующие частные решения уравнения (1):

$$u = e^{-a^2 \left(\delta^2 + \frac{m^2 \pi^2}{4h^2} \right) t} \cdot I_n(\delta r) \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) (A \cos n\theta + B \sin n\theta), \quad (4)$$

где A, B – коэффициенты.

Здесь m обозначены целые положительные числа, как это требует второе из граничных условий (2). Постоянная δ связана с корнями уравнения

$$I_n(v) = 0 \quad (5)$$

равенством

$$\delta = v/R, \quad (6)$$

где $I_n(v)$ – функция Бесселя; n – целое число; v – скорость перемещения.

Это требование третьего из граничных условий (2). Температура цилиндрической крепи есть периодическая функция угла θ с периодом, равным 2π .

Взяв теперь сумму всех решений вида (4), распространенную по всем $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots$ и по всем положительным корням $v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots$ уравнения (5), получим решение задачи в виде ряда:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2 \left(\frac{V_{nk}^2 r}{R^2} + \frac{m^2 \pi^2}{4h^2} \right) t}; I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right) \left[\sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) \right] (A_{kmn} \cos n\theta + B_{kmn} \sin n\theta). \quad (7)$$

Для определения коэффициентов A_{kmn} и B_{kmn} примем в уравнении (7) $t = 0$; тогда с учетом начального условия (3) получим

$$T(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right) \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) (A_{kmn} \cos n\theta + B_{kmn} \sin n\theta). \quad (8)$$

Поскольку правая часть равенства (8) представляет собой разложение функции $T(r, \theta, z)$ в ряд Фурье по $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, то коэффициенты при этих тригонометрических функциях определяются по известным формулам. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \theta, z) d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{km0} \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) \right] I_0 \left(\frac{V_{0k} r}{R} \right); \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \theta, z) \cos n\theta d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) \right] I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right); \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \theta, z) \sin n\theta d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) \right] I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Каждое из этих равенств представляет собой разложение функций, рассматриваемое как функция от r , в ряд по функциям Бесселя [2].

Отметим некоторые особенности применения функций Бесселя. При решении многих задач математической физики приходится решать линейные дифференциальные уравнения

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \quad (10)$$

где v – постоянная; x, y – неизвестные.

Уравнение (10) называется уравнением Бесселя. Поскольку это уравнение имеет особую точку $x = 0$, то его частное решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k. \quad (11)$$

Подставляя ряд (11) в уравнение (10), получим

$$(\rho^2 - v^2)b_0 x^\rho + [(\rho + 1)^2 - v^2]b_1 x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\rho + k)^2 - v^2]b_k + b_{k-2}\} x^{\rho+k} = 0, \quad (12)$$

где ρ – постоянная ряда Фурье.

Приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях x , получим

$$\rho^2 - v^2 = 0; \quad (13)$$

$$[(\rho + 1)^2 - v^2]b_1 = 0; \quad (14)$$

$$[(\rho + k)^2 - v^2]b_k + b_{k-2} = 0. \quad (15)$$

Из первого равенства находим два значения для ρ : $\rho_1 = v$ и $\rho_2 = -v$. Если возьмем первый корень $\rho = v$, то из формул (14) и (15) получим

$$b_1 = 0 \quad \text{и} \quad b_k = -\frac{b_{k-2}}{k(2v + k)}, \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (16)$$

Отсюда следует, что

$$b_{2k+1} = 0, \quad (k = 2, 3, 4, \dots). \quad (17)$$

Коэффициенты с четными индексами определяются по формулам

$$b_2 = -\frac{b_0}{2^2(v+1) \cdot 1!}; \quad b_4 = \frac{b_0}{2^4(v+1)(v+2) \cdot 2!} \quad \text{и т.д.,}$$

из которых ясно, что общее выражение для коэффициентов b_{2k} имеет вид

$$b_{2k} = (-1)^k \frac{b_0}{2^{2k}(v+1)(v+2)\dots(v+k)k!}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

Это решение носит название функции Бесселя 1-го рода v -го порядка и обозначается обычно через $I_v(x)$.

Функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$ представляются следующими рядами:

$$I_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots;$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right).$$

На рис. 2, б приведен график изменения $I_0(x)$ и $I_1(x)$.

Коэффициенты A_{kmn} и B_{kmn} из формулы (9) разложим по функциям Бесселя, откуда получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{km0} \sin \frac{m\pi}{2h}(z+h) = \frac{1}{\pi R^2 I_1^2(V_{0k})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_0\left(\frac{V_{0k} r}{R}\right) dr d\theta; \quad (19)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) = \frac{2}{\pi R^2 I_{n+1}^2(V_{nk})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right) \cos n\theta dr d\theta; \quad (20)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{kmn} \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) = \frac{2}{\pi R^2 I_{n+1}^2(V_{nk})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_n \left(\frac{V_{nk} r}{R} \right) \sin n\theta dr d\theta. \quad (21)$$

Поскольку функции $\sin(m\pi/2h)(z+h)$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-h, h]$, то в разложениях (19), (20) и (21) коэффициенты A_{kmn} и B_{kmn} определяются формулами:

$$A_{km0} = \frac{1}{\pi h R^2 I_1^2(v_{0k})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_0 \left(\frac{v_{0k} r}{R} \right) \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) dr d\theta dz;$$

$$A_{kmn} = \frac{1}{\pi h R^2 I_{n+1}^2(v_{nk})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_n \left(\frac{v_{nk} r}{R} \right) \cos n\theta \cdot \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) dr d\theta dz;$$

$$B_{kmn} = \frac{2}{\pi h R^2 I_{n+1}^2(v_{nk})} \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} r T(r, \theta, z) \cdot I_n \left(\frac{v_{nk} r}{R} \right) \sin n\theta \cdot \sin \frac{m\pi}{2h} (z+h) dr d\theta dz.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд (7), получим окончательные решения задачи (1)–(3).

Таким образом, задачу распространения тепла в кольцевых цилиндрических крепях конечных размеров можно свести к дифференциальным уравнениям теплопроводности. Выбирая начальные и граничные условия для перемещений с помощью рядов Фурье и функции Бесселя путем разложения компонентов в радиальном и тангенциальном направлениях, можно математически моделировать процессы деформирования крепи вследствие воздействия температуры при эндогенном пожаре.

Данная статья является частью комплексных исследований, посвященных воздействию эндогенных пожаров на шахтную крепь. В дальнейших исследованиях будут рассматриваться вопросы влияния высоких температур на подземное пространство в целом.

1. Грей Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. – М.-Л., 1953. – С. 18–24.

2. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. – М.: Гостехиздат, 1935. – 120 с.

3. Boley B. A. Thermally induced vibration of beams / Journal of the Aeronautical Science. – Febr., 1956. – V. 23.

4. Parcus H. Instationäre Wärmespannungen. – Wien: Springer Verlag. – 1959.