УДК 622.377:536.12

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В МАССИВЕ ГРУНТОВ ИЛИ ГОРНЫХ ПОРОД ОТ ОЧАГОВОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Н. В. Лебедев, инж. (ЗАО «Луганская угольная компания», г. Луганск)

Розроблено математичну модель температурного поля в двошаровому (багатошаровому) масиві грунту або гірських порід від джерела тепла. Побудова моделі грунтується на використанні еталонів грунтів або порід з відомими теплофізичними параметрами. За допомогою показників еталона виявляються можливі зміни параметрів температурних полів шарів грунту (породи) з невідомими теплофізичними властивостями.

Очаговый источник тепла, характеризующийся наличием высокой температуры, проникающей вглубь массива грунта или горных пород, создает расширяющееся температурное поле, нагревая массив в стационарном и нестационарном тепловых режимах. Температурное поле создает дополнительные напряжения в массиве грунта или горных пород вокруг очага тепловыделения, а на практике, как правило, под ним. Недостаточная изученность теплофизических параметров различных грунтов и горных пород создает определенные сложности при моделировании процесса распространения температурных полей в массиве перемежающихся водонасыщенных и водоупорных пластов и не позволяет проводить обоснованное прогнозирование тепло- и массопереноса.

В фундаментальных трудах [1–9] достаточно подробно проанализированы температурные поля, термонапряжения и термодеформации в конструкциях и узлах соединений, решены многие обратные задачи теплопроводности, даны оценки изменения температуры в отдельных точках некоторых материалов и влияние перепадов температуры. Однако эти вопросы не рассматривались для сыпучих и пористых, а тем более для влажных сред, к которым относятся грунты и горные породы.

Оценка тепло- и массопереноса, изменение теплофизических параметров в зависимости от давления и влажности, баланс теплового состояния, проведение безопасных горнопроходческих работ или ведение подземного строительства в зонах действия высоких температур тесно связаны с определением температурного поля внутри массива грунта. Создание достаточно полной математической модели температурного поля в массиве грунтов или горных пород позволит принимать более обоснованные решения, например, при проведении работ под Чернобыльским реактором, под горящими терриконами складированных отходов угледобычи, под теплотрассами в больших городах и т. д. Отсюда вытекает актуальность и народнохозяйственная значимость скорейшего решения проблемы математического моделирования температурного поля в массиве грунтов.

Цель настоящей работы – создать математическую модель температурного поля в массиве грунта и горных пород, определить параметры процесса распространения равных температурных полей от источника тепла с учетом различных теплофизических свойств пород, что позволит прогнозировать возможные опасные зоны воздействия теплового потока.

Рассмотрим температурное поле в системе двухслойного массива грунта под очаговым источником температуры.

Предположим, что мы имеем двухслойный массив грунта или горной породы, не ограниченный в пространственном отношении (длина и ширина), с толщиной первого слоя h и второго h_1. Эти слои имеют различные теплофизические свойства. Построение математической модели температурного поля массива с неизвестными теплофизическими параметрами одновременно для двух или более слоев невозможно. Поэтому принимаем в качестве физической основы математического моделирования температурного поля двух- или многослойных массивов моделирование с помощью эталонного слоя. Эталоном будем считать один из слоев грунта, теплофизические параметры которого известны, то есть определены в лабораторных условиях или известны из литературных источников.

Рассмотрим влияние очагового источника тепла на двухслойный массив, состоящий из супеси и глины. Теплофизические параметры мергельной (спондиловой) глины в сухом и влажном состоянии изучены нами в лабораторных условиях. Этот слой будем считать эталонным, а слой из супеси – слоем с неизвестными теплофизическими свойствами.

Математически задачу формулируем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{при } 0 < x < h,\ \tau > 0;\\
&\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_{1,T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{при } h < x < h_1,\ \tau > 0;\\
&T(0,\tau) = T_0;\ \ T(h,\tau) = T_0 - b\tau;\\
&\frac{\partial T_1(h_1,\tau)}{\partial x} = 0;\ \ T(h,\tau) = T_1(0,\tau);\\
&\lambda \frac{\partial T(h,\tau)}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial T_1(0,\tau)}{\partial x},
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где λ и λ_1 – коэффициенты теплопроводности; a_T и $a_{1,T}$ – коэффициенты температуропроводности; x, y, z – координатные оси от центра очагового источника тепла; T_0 – температура в начале координатных осей; τ – время; b – скорость нагрева массива от точечного источника тепла. Индексом “1” обозначены величины, относящиеся к эталону.

Решение системы (1) применительно к температурным полям слоистого грунтового массива можно получить методом интегрального преобразования Лапласа в следующем виде:

$$\theta(x,\tau) = b\tau + \frac{b}{2a_T}(x^2 - h^2) - \frac{bc_1h_1}{\lambda}(x+h) + 2b\sqrt{a_T a_{1,T}}\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(-\mu_n^2\tau)}, \qquad (2)$$

где $\theta(x, \tau) = T_0 - T(x, \tau)$; c_1 – объемная теплоемкость; μ_n – корни характеристического уравнения, определяемые из выражения

$$\mathrm{tg}\frac{1}{\sqrt{a_T}}\mu_n \mathrm{tg}\frac{h_1}{\sqrt{a_{1,T}}}\mu_n = \frac{\lambda\sqrt{a_{1,T}}}{\lambda_1\sqrt{a_T}};$$

$$A_n = \frac{\lambda\sqrt{a_{1,T}}\cos\frac{h_1}{\sqrt{a_{1,T}}}\mu_n\cos\frac{x}{\sqrt{a_T}}\mu_n + \lambda_1\sqrt{a_T}\sin\frac{h_1}{\sqrt{a_{1,T}}}\mu_n\sin\frac{x}{\sqrt{a_T}}\mu_n}{\mu_n^3\left[\left(\lambda a_{1,T}h + \lambda_1 a_T h_1\right)\sin\frac{h}{\sqrt{a_T}}\mu_n\cos\frac{h_1}{\sqrt{a_{1,T}}}\mu_n + \sqrt{a_T a_{1,T}}(\lambda_1 h + \lambda h_1)\cos\frac{h}{\sqrt{a_T}}\mu_n\sin\frac{h_1}{\sqrt{a_{1,T}}}\mu_n\right]}.$$

При $\tau > \tau_1$ (где τ_1 – малый отрезок времени) сумма членов ряда (2) становится весьма малой величиной по сравнению с первыми регулярными членами и температурный период $U(x)$ имеет следующий вид:

$$U(x) = \theta(h,\tau) - \theta(x,\tau) = \frac{b_1c_1h_1}{\lambda}(h+x) + \frac{b}{2a_T}(h^2x^2), \qquad (3)$$

откуда, экспериментально определив $U(x_1)$ и $U(x_2)$ (где x_1 и x_2 – близкие между собой точки по оси x), находим теплофизические свойства слоя с неизвестными теплофизическими свойствами.

Приняв, например, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{h}{2}$ и определив $U_1 = U(0)$ и $U_2 = U(\frac{h}{2})$, получим значения a_T и λ для слоя, теплофизические параметры которого неизвестны, в следующем виде:

$$a_T = \frac{bh^2}{4(2U_2 - U_1)}; \qquad \lambda = \frac{bc_1h_1h}{3U_1 - 4U_2}. \qquad (4)$$

Измерение температурного перепада в любой точке массива при наличии глубинных измерительных приборов и выносных регистрирующих устройств [12, 6, 10] никаких трудностей не представляет. Этот метод применим в случае, когда материал или слой грунта имеет переменные теплофизические свойства в площадном направлении, то есть по осям x и y.

Определенные сложности возникают при изучении теплофизических свойств массива в пределах температурного перепада по глубине z и времени τ, то есть $U(z, \tau)$.

Для определения $U(z, \tau)$ используем относительные температурные коэффициенты, зависящие от интенсивности температуры, создаваемой источником тепла T. Эти коэффициенты обозначим

$$i = \lambda(T);\ a_T(T);\ c(T);\ k_i = \frac{1}{i_0} \cdot \frac{di}{dT};\ n_i = \frac{1}{2i_0} \cdot \frac{d^2 i}{dT^2},$$

где $\lambda(T);\, a_T(T);\ c(T)$ – величины изменения теплофизических параметров грунта, зависящих от T; i_0 – начальные величины теплофизических параметров слоя грунта при T_0; i – величина изменения теплофизических параметров с изменением температуры от T_0 до T; z – координата в направлении теплового потока по глубине массива. Изменение i характеризуется изменениями $\lambda(T);\, a_T(T);\ c(T)$.

С учетом принятых обозначений теплофизические свойства грунтового массива в пределах температурного перепада $U(z, \tau)$ могут быть представлены в виде

$$i = i_0(1 + k_i U + n_i U^2 + \ldots).$$

Температура от поверхностного источника тепла и скорость нагрева уменьшаются с глубиной слоев грунта. Если представить скорость $b(z, \tau)$ в виде монотонно убывающих функций, зависящих от относительных температурных коэффициентов k_{bz} и n_{bz}, то скорость убывания температуры $b(z, \tau)$ во времени τ будет иметь вид, как изменение i:

$$b(z, \tau) = b_0(1 + k_{b,z} U + n_{b,z} U^2 + \ldots),$$

где $k_{b,z} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{db}{dU}$ и $n_{b,z} = \frac{1}{2b_0} \cdot \frac{d^2 b}{dU^2}$ – относительные температурные коэффициенты, характеризующие постоянство скорости убывания температуры $b(z, \tau)$ по глубине массива грунта.

Если считать, что от источника тепла на массив грунта передается тепловой поток постоянной мощности, то температура в любой точке (даже при $z = 0$) должна изменяться во времени τ по экспоненциальному закону:

$$T(0, \tau) = m - (m - T_0)e^{-\tau k}, \tag{5}$$

где $m = \lim\limits_{\tau \to \infty} T(0, \tau)$; k – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения температуры $T(0, \tau)$.

Учитывая, что относительный температурный коэффициент

$$k_{b,\tau} = \frac{1}{b_0} \cdot \frac{db}{dT} = \text{const},$$

считаем, что в зонах фазовых переходов при малых температурных перепадах можно пренебречь изменением теплофизических свойств и будет достаточно найти решение задачи в первом приближении. В этом случае уравнения теплопроводности будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2=\frac{b}{a_T},\ \text{при}\ 0<z<h;\\
&\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}+\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial T_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)^2=\frac{b}{a_{1,T}},\ \text{при}\ h<z<h+h_1=H;\\
&T(z,0)=T_1(z,0)=T_0;\quad T(0,\tau)=T_0-\tau b(0,\tau);\\
&\frac{\partial T_1(H,\tau)}{\partial z}=0;\quad T(h,\tau)=T_1(h,\tau);\\
&\lambda\frac{\partial T(h,\tau)}{\partial z}=\lambda_1\frac{\partial T_1(h,\tau)}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

с учетом допущений

$$\left.\begin{aligned}
&i=i_0(1+k_iU);\ i_1=i_{1,0}\left[1+k_i(U_1-U_h)\right];\\
&b(z,\tau)=b_0(1+k_{b,z}U);\\
&|k_iU|\le 0{,}1;\ |k_i(U_1-U_h)|\le 0{,}1;\ |k_{b,z}U|\le 0{,}1,
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

где $U=T(0,\tau)-T(z,\tau);\ U_1=T(0,\tau)-T_1(z,\tau);\ U_h=T(0,\tau)-T(h,\tau)$.

С учетом (7) уравнения теплопроводности (6) преобразуются к виду

$$\frac{d^2U}{dz^2}=-\left\{\frac{b_0}{a_{T,0}}+\left[\frac{b_0}{a_{T,0}}(k_{b,\tau}-k_{a_T})U+k_\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]\right\};\tag{8}$$

$$\frac{d^2U_1}{dz^2}=-\left\{\frac{b_0}{a_{1,T,0}}+\left[\frac{b_0}{a_{1,T,0}}(k_{b,\tau}-k_{a_T})U_1+k_\lambda\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2\right]\right\},\tag{9}$$

где $k_{b,\tau}=k_{b,z}+k_{a_T}$; k_{a_T} – коэффициент температуропроводности; $a_{T,0}$ – температуропроводность слоя с неизвестными теплофизическими параметрами при T_0; $a_{1,T,0}$ – температуропроводность эталонного грунтового слоя при T_0; k_λ – коэффициент теплопроводности.

Поскольку члены, стоящие в квадратных скобках в уравнениях (8) и (9), являются малыми и играют роль поправок, можно осуществить их линеаризацию путем нахождения поправочных членов из решения этих уравнений в нулевом приближении.

Тогда температурное поле, как температурный перепад в слое с неизвестными теплофизическими свойствами можно записать в виде

$$U=b_0\left[\frac{c_{1,0}h_1z}{\lambda_0}+\frac{z(2h-z)}{2a_{T,0}}\right]-(b_0)^2\left\{\left[\frac{z(4h^3-z^3)}{24(a_{T,0})^2}-\left(\frac{h}{a_{T,0}}+\frac{c_{1,0}h_1}{\lambda_0}\right)\frac{z(3h^2-z^2)}{6a_{T,0}}+\frac{c_{1,0}h_1^3z}{6\lambda_0a_{1,T,0}}\right](2k_\lambda+\right.$$
$$\left.+k_{a_T}-k_{b,\tau})+\left(\frac{c_{1,0}hh_1}{\lambda_0}+\frac{h^2a_{1,T,0}+h_1^2a_{T,0}}{2a_{T,0}a_{1,T,0}}\right)\frac{c_{1,0}h_1z}{\lambda_0}(k_{b,\tau}-k_{a_T})+\left(\frac{h}{a_{T,0}}+\frac{c_{1,0}h_1}{\lambda_0}\right)^2\frac{z(2h-z)}{2}k_\lambda\right\}. \quad (10)$$

Выражение (10) убывания температурных перепадов по глубине массива z можно представить в виде

$$U = U_0 - \Delta U, \quad (11)$$

где ΔU – приращение убывания перепада температуры (поправок) в зависимости от изменений относительных температурных коэффициентов $k_\lambda, k_{a_T}, k_{b,z}$ на температурном поле массива грунта; U_0 – температурный перепад в контактной зоне.

Из (10), если учесть малые значения поправочного члена ΔU, следует:

$$a_T = b_0h^2\psi_{a_T}; \quad (12)$$

$$\lambda = b_0c_{1,0}hh_1\psi_\lambda; \quad (13)$$

$$\psi_{a_T}=\left[8U_{h/2}-4U_h-\frac{U_h^2}{3}(5k_\lambda+k_{a_T}-k_{b,\tau})+\frac{8}{3}U_hU_{h/2}(k_\lambda-k_{a_T}+k_{b,\tau})-\frac{4}{3}U_{h/2}^2(2k_\lambda-5k_{a_T}+5k_{b,\tau})\right]^{-1},$$

где

$$\psi_\lambda=\left[3U_h-4U_{h/2}-\frac{U_h^2}{2}(2k_\lambda-5k_{a_T}+5k_{b,\tau})+\frac{8}{3}U_hU_{h/2}(k_\lambda-\right.$$
$$\left.-k_{a_T}+k_{b,\tau})-\frac{2}{3}U_{h/2}^2(2k_\lambda+5k_{a_T}-k_{b,\tau})+\frac{b_0h_1^2}{3a_{1,T,0}}(3U_h-4U_{h/2})(k_\lambda+k_{a_T}-k_{b,\tau})\right]^{-1}.$$

Как показали расчеты, величины ψ_{a_T} и ψ_λ незначительны, поэтому для практических расчетов можно условно принять $|\Delta U| \le |0{,}01U|$. Тогда получим расчетные формулы, аналогичные выражению (4).

Влияние температурного поля от очага тепловыделения на массив прекращается, если на некотором расстоянии от источника тепла температура поля окажется весьма близкой к естественной температуре породы (грунта) на данной глубине.

Для эталона мергельной (спондиловой) глины в сухом и влажном состоянии примем теплофизические параметры, полученные в лабораторных условиях:

λ_0 = 2 Вт/м °С – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,02;
λ_0 = 4 Вт/м °С – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,3;

$c_0 = 2{,}1 \cdot 10^6$ Дж/м^3 °С – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,02;
$c_0 = 3{,}2 \cdot 10^6$ Дж/м^3 °С – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,3;
$b_0 = 0{,}81 \cdot 10^2$ °С/с;
$a_{T,0} = 0{,}86 \cdot 10^{-3}$ м^2/r – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,02;
$a_{T,0} = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ м^2/r – при P = 1ат, T = 20°С, W = 0,3;
$k_{a_T} = k_\lambda = 2 \cdot 10^3 \cdot °C^{-1}; \;\; k_{b,\tau} = 3{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot °C^{-1}$.

При любой толщине эталонного слоя h_1 и слоя с неизвестными теплофизическими параметрами h можно вычислить температурные перепады U, определить изменение теплофизических параметров a_T и λ по формуле (4), спрогнозировать температурные поля θ по формуле (2) или температурный перепад U по формуле (10) в массиве грунта или горных пород.

Выводы

1. Разработана математическая модель распространения температурных полей в массиве горной породы от очагового источника тепла.

2. Используя эталон грунтов или горных пород с известными теплофизическими параметрами, можно прогнозировать распространение температурных полей в многослойном грунтовом массиве с изменяющимися теплофизическими показателями.

3. Скорость температуры теплового потока от очагового источника тепла при увеличении глубины грунтового массива монотонно убывает и может быть определена убывающей функцией с помощью заранее установленных или известных относительных температурных коэффициентов, зависящих от глубины, времени и теплофизических параметров эталонного грунта или горных пород.

4. Изменение температуры в массиве грунта и горных пород по глубине и во времени зависят от давления, влажности и интенсивности температуры. При постоянной влажности и давлении изменение температуры по глубине массива и во времени в основном подчиняется экспоненциальному закону.

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.

2. *Бычковский Р. В., Вагдорович В. Н., Колесник Е. А. и др.* Приборы для измерения температуры контактным способом (справочник). – Львов: Вища школа. – 208 с.

3. *Вичак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наукова думка, 1979. – 360 с.

4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

5. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 320 с.

6. *Лах В. И., Стаднык Б. И., Кюздени О. А.* Приборы для измерения температуры контактным методом: обзорная информация. – М., 1969. – 220 с.

7. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

8. *Карслоу Х. С.* Теория теплопроводности. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 240 с.

9. *Синицын А. П.* Расчет конструкций на тепловой удар. – М.: Изд. лит. по стр-ву, 1971. – 230 с.