

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЫНУЖДЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАНАТА ПОДЪЕМНОЙ УСТАНОВКИ

И. О. Горошко, канд. физ.-мат. наук, А. В. Козак, асп. (ИПМЭ им. Пухова НАНУ)

Розглянуто модель поперечних коливань канатів підйомних установок і один з чисельних методів розв'язання задачі, описаної такою моделлю. Знання дійсного характеру навантаження механізмів дозволить виготовляти надійні конструкції машин з невеликими затратами, а при експлуатації досягати найбільшої продуктивності за рахунок обгрунтованого використання резервів міцності і потужності.

Привод любой машины состоит из элементов, которые могут быть приведены к сосредоточенным массам (ротор электродвигателя, маховики, движущиеся массы рабочих органов машины и др.) и упругим связям (канаты, цепи, ленты, валы, муфты, зубчатые передачи и др.). Под действием внешних нагрузок (моментов электродвигателя и тормозов, сопротивлений рабочей машины) упругие элементы деформируются, а сосредоточенные массы машин совершают, кроме основного движения, малые колебания, то есть перемещаются с различными мгновенными скоростями, причем каждая из масс в некоторые моменты времени опережает соседнюю или отстает от нее.

Переменная составляющая сил или моментов при упругих колебаниях может быть настолько большой, что суммарные мгновенные значения их значительно превышают статические и инерционные нагрузки и могут привести к перегрузкам и поломкам деталей машин.

Математическая модель. Поперечные колебания канатов подъемных установок описываются уравнением

$$P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь x – координата точки каната; t – время; P – заданная постоянная; ρ – линейная плотность материала каната; f – функция, описывающая распределенное, изменяющееся во времени силовое воздействие.

Пусть канат закреплен в точках $x = 0$ и $x = X$. Внешнее воздействие представляет собой гармоническую функцию

$$f(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t,$$

а искомой является функция $u(x, t)$, которая определяет вынужденные колебания той же частоты ω и имеет вид

$$u(x, t) = v(x) \cos \omega t,$$

где $v(x)$ – неизвестная функция. Подстановка приведенных выражений в уравнение (1) поперечных колебаний струны приводит к краевой задаче

$$Pv'' = -\rho\omega^2 v - \varphi(x); \quad (2)$$

$$v(0) = 0, v(X) = 0 \quad (0 \leq x \leq X).$$

Одним из методов решения краевой задачи (2) является ее представление в виде интегрального уравнения, которое решается аналитическим или численным методом. Известно, что решение задачи о стационарном отклонении струны при $\omega = 0$ имеет вид

$$v(x) = -\frac{1}{P} \int_0^x G(x,s) \varphi(s) ds, \quad (3)$$

где функция влияния

$$G(x,s) = \begin{cases} -(X-s) \frac{x}{X} & (0 \leq x \leq s \leq X), \\ -s(X-x) \frac{1}{X} & (0 \leq s \leq x \leq X). \end{cases}$$

В решаемой задаче при $\omega \neq 0$ в правую часть дифференциального уравнения (2), кроме $\varphi(x)$, входит также $\rho\omega^2 v(x)$. Подстановка этих параметров в интегральное представление (3) приводит к соотношению [1, 3]

$$v(x) = -\frac{\rho\omega^2}{P} \int_0^x G(x,s) v(s) ds - \frac{1}{P} \int_0^x G(x,s) \varphi(s) ds, \quad (4)$$

которое относительно неизвестной функции $v(x)$ является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Метод решения интегральных уравнений с разделяющимся ядром. Среди приближенных методов решения интегральных уравнений достаточно большой класс составляют методы, основанные на сведении интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений. К этому классу относится метод разделяющихся ядер, который состоит в предварительной аппроксимации ядра

$$K(x,s) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j(x) \cdot \beta_j(s),$$

исходя из выбранного критерия оптимальности подобного приближения, и последующем решении приближенного уравнения.

Наиболее наглядно его использование можно видеть на примере решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с разделяющимся ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \cdot \int_a^b K(x,s) \cdot \varphi(s) ds, \quad (5)$$

где

$$K(x,s) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i(x) \cdot \beta_i(s); \quad (6)$$

$\{\alpha_i(x)\}, \{\beta_i(s)\}$ – системы координатных линейно независимых функций.

Тогда решение уравнения (5), где λ не является собственным значением ядра $K(x, s)$, может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^N A_j \cdot \alpha_j(s). \quad (7)$$

Коэффициенты A_j находятся из решения алгебраических уравнений, полученных подстановкой выражения (6) в исходное уравнение (5) с учетом линейной независимости функции $\alpha_j(x)$:

$$A_i = \lambda \cdot f_i + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} A_j, \quad i = \overline{1, n},$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \beta_i(s) \alpha_j(s) ds;$$

$$f_i = \int_a^b f(s) \beta_i(s) ds.$$

Если определитель системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1m} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{m1} & -\lambda a_{m2} & \dots & 1 - \lambda a_{mm} \end{vmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$D(\lambda) \neq 0,$$

то система имеет единственное решение, которое можно получить применением различных численных методов.

Решение уравнения (7) можно записать в явном виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma_k(x, s, \lambda) f(s) ds,$$

где $\Gamma_k(x, s, \lambda)$ – резольвента интегрального уравнения (7), которая в данном случае определяется как

$$\Gamma_k(x, s, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(s)}{D(\lambda)};$$

где Δ_{ij} – алгебраическое дополнение i -ой строки и j -го столбца.

Все изложенное без изменений относится и к уравнениям Фредгольма первого рода при сведении их к уравнениям Фредгольма второго рода посредством различных методов регуляризации.

Аналогичным способом решаются нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна:

$$y(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \cdot \int_a^b \beta_i(s) \cdot F(s, y(s)) ds. \quad (8)$$

Если положить

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) \cdot F(s, y(s)) ds, \quad (9)$$

то решение уравнения (8) имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \alpha_i(x). \quad (10)$$

Подстановкой выражения (10) в (9) получаем систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) \cdot F(s, \sum_{i=1}^m c_i \cdot \alpha_i(x)) ds. \quad (11)$$

После решения данных уравнений определяется решение (одно или несколько) исходного уравнения (7) простой подстановкой значений вычисленных коэффициентов в выражение (9).

Алгоритм аппроксимации ядра. Метод разделяющихся ядер – достаточно общий метод решения интегральных уравнений, так как в результате к нему сводятся многие известные методы (например метод Галеркина и коллокаций [2]). Существует несколько методов аппроксимации ядра вырожденным [1], однако не все они достаточно приспособлены для численного или машинного решения уравнений. В настоящей статье подробно рассмотрен один из методов представления ядра суммой парных произведений функций одной переменной, обладающий определенными достоинствами при реализации метода разделяющихся ядер.

Большое число методов аппроксимации ядер как функций двух переменных объединяет одна общая предпосылка, которая состоит в том, что предварительно выбирается одна или две системы координатных функций, а затем из условия выбранного критерия оптимальности отыскиваются коэффициенты разложения исходной функции. Далее излагается метод аппроксимации функции двух переменных, отличающийся тем, что сами функции одной переменной, сумма парных произведений которых аппроксимирует исходную функцию, формируются оптимальным образом в смысле минимума квадратичной невязки. Рассматриваемый метод используется для решения интегральных уравнений.

Пусть задана интегрируемая в прямоугольнике $(P_3 \leq s \leq P_4, P_1 \leq t \leq P_2)$ функция $K(s, t)$. Требуется аппроксимировать ее суммой $\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$, исходя из условия минимума квадратичного функционала

$$\varphi = \int_{P_1}^{P_2} \int_{P_3}^{P_4} \left[K(s, t) - \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \right]^2 ds dt. \quad (12)$$

Схема метода состоит в том, что сначала находится первое приближение функции $K(s, t)$ в виде одного слагаемого $a_1(s)b_1(t)$. Формируется это первое слагаемое следующим образом: задается $b_1^0(t)$ – нулевое приближение функции $b_1(t)$ и из условия минимума функционала

$$\varphi_1^{(0,0)} = \int_{P_1}^{P_2} \int_{P_3}^{P_4} \left[K(s, t) - \sum_{i=1}^n a_1^{(0)}(s) b_1^{(0)}(t) \right]^2 ds dt \quad (13)$$

находится $a_1^{(0)}(s)$ – нулевое приближение $a_1(s)$.

Известным вариационным методом находим, что для выполнения условия минимума функционала, определяемого выражением (13), необходимо, чтобы

$$a_1^{(0)}(s) = \frac{\int_{P_1}^{P_2} K(s, t) b_1^{(0)}(t) dt}{\int_{P_1}^{P_2} [b_1^{(0)}(t)]^2 dt}. \quad (14)$$

Затем уточняются функции $a_1^{(0)}(s)$ и $b_1^{(0)}(t)$, то есть из условия минимума функционала

$$\varphi_1^{(0,1)} = \int_{P_1}^{P_2} \int_{P_3}^{P_4} \left[K(s, t) - \sum_{i=1}^n a_1^{(0)}(s) b_1^{(1)}(t) \right]^2 ds dt$$

ищется $b_1^{(1)}(t)$ – первое приближение функции $b_1(t)$:

$$b_1^{(1)}(t) = \frac{\int_{T_3}^{T_4} K(x, s) a_1^{(0)}(s) ds}{\int_{T_3}^{T_4} [a_1^{(0)}(s)]^2 ds}$$

и т.д. Процесс прекращается, как только

$$\left. \begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} [b_1^{(N+1)}(t) - b_1^{(N)}(t)]^2 dt &\leq \varepsilon_1 \\ \int_{P_3}^{P_4} [a_1^{(N+1)}(s) - a_1^{(N)}(s)]^2 ds &\leq \varepsilon_2 \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где ε_1 и ε_2 – заданная точность вычисления функций $b_1(t)$ и $a_1(s)$.

Перейдем к следующему шагу. Аналогичным образом приближаем функцию $K(s, t) - a_1(s)b_1(t)$ произведением $a_2(s)b_2(t)$, исходя из того же критерия оптимальности (12) и т.д.

Таким образом, получаем ряд $\sum_{i=1}^n a_i(s)b_i(t)$, который с заданной точностью аппроксимирует исходную функцию $K(s, t)$.

Для построения аппроксимирующего ряда можно применить другой способ, отличающийся от первого тем, что задается N функций $b_i^{(0)}(t) (i = \overline{1, N})$, представляющих собой нулевое приближение функций $b_i(t)$ (число членов аппроксимирующего ряда при этом выбирается заранее).

Нулевое приближение для функций $a_i(s) (i = \overline{1, N})$ вычисляется из условия минимума функционала

$$I_{jt}^{(0)} = \int_a^b \left[K(t, s_j) - \sum_{i=1}^N a_{ij}^{(0)} b_i^{(0)}(t) \right]^2 dt, \quad j = \overline{1, N},$$

где $b_{ij}^{(0)} = b_i^{(0)}(t_j)$; $a_{ij}^{(0)} = a_i^{(0)}(s_j)$.

Далее процесс аппроксимации заключается в составлении и минимизации функционалов

$$I_{jt}^{(1)} = \int_a^b \left[K(t, s_j) - \sum_{i=1}^N a_{ij} b_i^{(1)}(t) \right]^2 dt;$$

$$I_{js}^{(1)} = \int_a^b \left[K(t_j, s) - \sum_{i=1}^N a_i^{(1)}(s) b_{ij} \right]^2 dt,$$

и затем $I_{js}^{(2)}, I_{jt}^{(2)}, \dots, I_{js}^{(k)}, I_{jt}^{(k+1)}$, что позволяет на каком-либо k -ом приближении $a_i^{(k)}(s)$ и $b_i^{(k)}(t)$ достичь возможной при данном N точности аппроксимации.

Пример. Рассмотрим пример решения задачи со следующими условиями:

$$K(x, s) = e^{-xs},$$

$$f(x) = \cos 2\pi x + (1-x) \sin \pi x - \frac{x(e^{-x} + 1)[x^2 + \pi(\pi - 4)] + 2\pi(x^2 + \pi^2)}{2(x^2 + \pi^2)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-x} + 1}{x^2 + 9\pi^2} \right) x$$

при $a = 0, b = 1, \lambda = 1, \varepsilon = 10^{-3}, h = \Delta x = \Delta s = \text{const} = 0,05$.

Известно точное аналитическое решение уравнения

$$\bar{y}(x) = \cos 2\pi x + (1-x) \sin \pi x.$$

Для решения задачи согласно алгоритму составлена программа в MATLAB. В результате при описанных выше условиях за три итерации мы добиваемся заданной точности и получаем

$$c_1 = 0,3747, \quad c_2 = -3,5302, \quad c_3 = -36,6545.$$

Из рис. 1 и 2 следует, что решение интегрального уравнения с помощью разделяющихся ядер хорошо сходится к точному аналитическому решению.

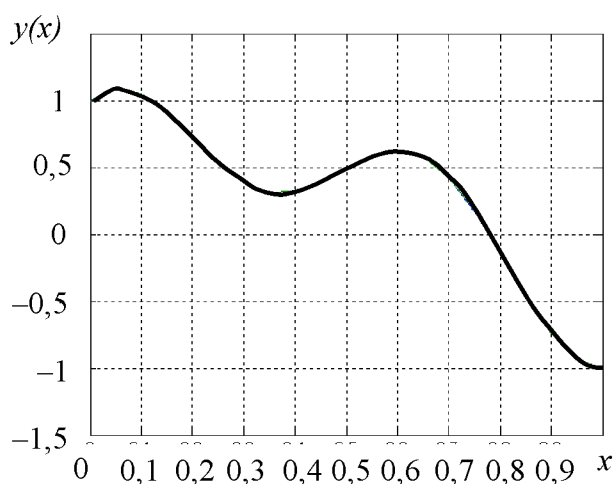


Рис. 1. Решение интегрального уравнения методом разделяющихся ядер

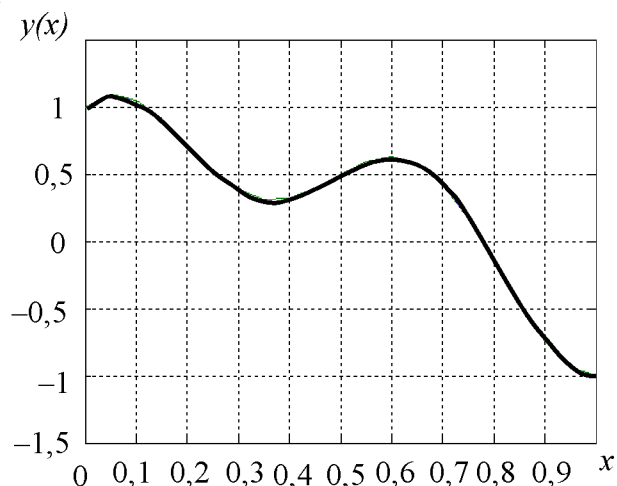


Рис. 2. Точное аналитическое решение

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Наук. думка, 1978. – 292 с.

2. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. – Минск: Вышэйшая школа, 1975. – 671 с.

3. Кабулов В. К. Интегральные уравнения продольных колебаний стержней. – ДАН УзССР. – 1956. – 3. – № 11. – С. 7–12.