УДК 622.235

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ШАРОШЕЧНОГО БУРЕНИЯ СКВАЖИН НА БЛОКЕ

А. И. Крючков, канд. техн. наук, Н. И. Жукова, Л. И. Евтеева, инженеры (НТУУ «КПИ»)

Розглянуто новий підхід до математичного моделювання процесу руйнування гірської породи шарошковим долотом при бурінні свердловин на блоці. Встановлено загальний принцип моделювання, що відповідає вимогам при моделюванні нестаціонарних ймовірнісних процесів, записані необхідні рівняння як у загальному вигляді, так і для розглянутого випадку. Отримані аналітичні вирази для розрахунку технологічних параметрів процесу буріння свердловин.

Введение

Для исследования буровых работ на карьерах наряду с прямыми экспериментальными исследованиями часто используют математические модели процессов. Проблема заключается в разработке комплекса взаимосвязанных математических моделей, позволяющих провести исследования кинематики и динамики режима бурения и установить его основные закономерности.

Бурению горных пород посвящено большое количество исследований и публикаций отечественных и зарубежных авторов. Однако большинство из них представляет собой обобщение результатов лабораторных и полевых экспериментов. Явно недостаточно работ, в которых аналитически исследуется процесс бурения и из которых можно получить достоверную информацию о нем для гармонизации и оптимизации параметров исполнительного органа станка, режима бурения, технологических и энергетических показателей процесса.

При большом количестве отдельных физических процессов в комплексе буровых работ с технологической точки зрения можно выделить два основных:

технологическое разрушение горного массива шарошечным долотом;

перемещение в пространстве разрушенной горной массы от забоя к поверхности обуриваемого блока.

Экспериментальные исследования указанных процессов позволяют отнести их к вероятностным динамическим нестационарным процессам, которые являются наименее исследованными и для которых аналитические методы наименее разработаны. В предлагаемой статье рассмотрены математические модели первого процесса.

Принцип моделирования нестационарных случайных процессов

В последнее время для решения подобных задач используют подход, основанный на принципе дуальности движения массы в пространстве [1, 2]. Использование этого подхода к математическому моделированию процесса разрушения горного массива шарошечным долотом позволяет более эффективно и целенаправленно управлять процессом бурения на карьерах.

Исходя из этого принципа, были получены уравнения, описывающие вероятностные динамические нестационарные процессы.

Первое уравнение представляет собой стохастическое уравнение Гамильтона–Якоби и описывает набор возможных траекторий движения массы в пространстве

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{(\nabla D)^2}{2m} - U + \left(R + \overset{\circ}{R}\right), \tag{1}$$

где $D = \int_t L dt$ – действие для моделируемого процесса; L – функция Лагранжа; $(\nabla D)^2 / 2m = T$ – кинетическая энергия моделируемого процесса; $(R + \overset{\circ}{R})$ – энергия диссипации процесса; $\overset{\circ}{R}$ – случайная составляющая энергии диссипации.

Каждая из рассматриваемых траекторий движения массы в пространстве отличается одна от другой вероятностью. Поэтому второе уравнение представляет собой уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) и описывает плотность вероятности координат траектории движущейся массы

$$\frac{\partial p(x_i,t)}{\partial t} = \frac{D^2}{2m}\nabla^2 p(x_i,t) + \frac{\nabla D}{m}\cdot\nabla p(x_i,t) + \frac{U}{D}p(x_i,t), \tag{2}$$

где $p(x_i,t)$ – нестационарная плотность вероятности как функция координат и времени.

В результате решения уравнения Гамильтона–Якоби (1) находится зависимость координат от времени и других параметров для набора случайных траекторий $x_i = f(t)$. Решение уравнения ФПК позволяет получить нестационарную плотность вероятности координат $p(x_i,t)$ при заданных начальных и граничных условиях. На основании этих решений определяются математическое ожидание координат траектории

$$\bar{x}_i = \int x_i(t)\, p(x_i,t)\, dx_i\,,$$

дисперсия

$$\sigma_x^2 = \int (x_i - \bar{x}_i)^2\, p(x_i,t)\, dx_i$$

и другие интересующие нас параметры. Показано [2], что вместо уравнения Гамильтона–Якоби могут быть использованы эквивалентные ему уравнения Ньютона, Эйлера, Гамильтона, Лагранжа.

Математическая модель процесса бурения

В процессе бурения горного массива шарошечное долото участвует в поступательном и вращательном движениях. В результате конкретная точка на долоте (скажем, вершина твердосплавного штыря) перемещается в пространстве по достаточно сложной траектории. Энергия, подводимая к буровому станку, тратится на процесс бурения и может быть представлена следующими составляющими:

$$E_б = T + U + \Delta E + R_б + R_о, \tag{3}$$

где $E_б$ – полная энергия, получаемая из электрической сети; T – кинетическая энергия движущихся частей системы; U – потенциальная энергия системы; ΔE – потери энергии в системе; $R_б$ – диссипативная часть энергии, которая пошла на разрушение горного массива; $R_о$ – диссипативная часть энергии, которая пошла на очистку скважины.

Кинетическая энергия системы обусловлена вертикальным поступательным движением массы бурового става и вращательным движением привода и вращателя с суммарным моментом инерции, приведенным к буровой штанге:

$$T = m\frac{V^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2},$$

где V – скорость подачи бурового става на забой; m – масса бурового става, участвующая в поступательном вертикальном перемещении; I – момент инерции вращающейся части бурового става; ω – угловая частота вращателя.

Потенциальная энергия бурового става состоит из энергии упругих деформаций и энергии силы тяжести

$$U = U_\partial + U_т.$$

Упругость конструкции приводит к возникновению высокочастотных крутильных и линейных колебаний вращателя. С технологической точки зрения интересна только постоянная составляющая скорости бурения и ее низкочастотные переменные составляющие, на которых упругость конструкции сказывается незначительно. В связи с этим за полную потенциальную энергию системы можно принять энергию сил гравитации $U \approx U_т$, что значительно упрощает модель процесса. Тогда полное усилие воздействия исполнительного органа на забой

$$P_з = P + mg + \frac{M}{h}, \tag{4}$$

где P – осевое усилие бурения; mg – вес бурового става, передаваемый на забой; M – момент на валу вращателя; h – глубина внедрения шарошки в породу.

Эффективность разрушения массива горных пород шарошечным долотом определяется энергией, передаваемой породе при каждом ударе штыря во время вращения шарошки.

Для определения энергетических затрат на разрушение породы были проведены эксперименты, при которых замерялись затраты мощности на процесс разрушения с одновременной фиксацией основных параметров режима бурения: скорости бурения V, скорости вращения исполнительного органа ω, осевого усилия подачи P. Тогда работа разрушения горной породы может быть определена по выражению [4]

$$A_{\text{р}} = \int N_x \exp\left(\frac{e_{\text{ш}} S V}{N_x}\right) dt, \tag{5}$$

где $N_x = \bar{D}_x \omega^2$ – мощность диссипативных потерь в системе; $e_{\text{ш}}$ – энергоемкость разрушения горной породы шарошечным долотом [4]; S – площадь поперечного сечения скважины; $V = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = h\omega$ – скорость бурения скважины.

Как было указано ранее, уравнение Гамильтона–Якоби (1) может быть заменено эквивалентным ему уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_j^m Q_j - R, \tag{6}$$

где $L = T - U$ – функция Лагранжа; q_i – обобщенные координаты; $\dot{q}_i$ – обобщенная скорость; Q_j – обобщенная сила; R – диссипативная сила.

В нашем случае в качестве независимых обобщенных координат принимается глубина разрушения h и угловая скорость вращателя ω. Тогда соответствующие уравнение Лагранжа примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\omega \partial h}\right) - \frac{\partial U}{\partial h} = \frac{\partial}{\omega \partial h}\left[N_{\text{з}} - \left(N_{\text{р}} + \overset{\circ}{N}_{\text{р}}\right)\right]; && (7) \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[N_{\text{з}} - \left(N_{\text{р}} + \overset{\circ}{N}_{\text{р}}\right)\right]. && (8) \end{aligned}\right\}$$

Здесь составляющая $\overset{\circ}{N}_{\text{р}}$ является случайным стохастическим центрированным процессом (с нулевым математическим ожиданием).

Подставив соответствующие значения в уравнения (7) и (8), после соответствующего дифференцирования получим

$$m\frac{\omega dh}{dt} = P + mg - e_{\text{ш}} S \exp\left(\frac{e_{\text{ш}} S h \omega}{D_x \omega^2}\right) - \overset{\circ}{F}; \tag{9}$$

$$I\frac{\partial \omega}{\partial t} = (P + mg)h + M_0 - (2D_x\omega - e_{\text{ш}} S h)\exp\left(\frac{e_{\text{ш}} S h\, \omega}{D_x \omega^2}\right) - \overset{\circ}{M}, \tag{10}$$

где M_0 – начальный момент на вращателе; $\overset{\circ}{F}$ и $\overset{\circ}{M}$ – случайные составляющие усилия и моменты разрушения с нулевым математическим ожиданием.

В стационарном (установившемся) режиме бурения параметры h и ω практически постоянные, что позволяет определить их стационарные значения из уравнений

$$P+mg-e_{\text{ш}}S\exp\left(\frac{e_{\text{ш}}Sh\omega}{D\omega^2}\right)=0; \tag{11}$$

$$\left(P+mg\right)h+M_0-\left(2D\omega-e_{\text{ш}}Sh\right)\exp\left(\frac{e_{\text{ш}}Sh\omega}{D\omega^2}\right)=0. \tag{12}$$

Угловую скорость вращателя станка определяем с учетом параметров привода и свойств горного массива:

$$\omega=\frac{M_0}{\dfrac{2D_x\left(P+mg\right)}{e_{\text{ш}}S}\left(1-\ln\dfrac{P+mg}{e_{\text{ш}}S}\right)}, \tag{13}$$

а глубина разрушения породы под действием штыря шарошки определяется по выражению

$$h=\frac{M_0-D_x\omega}{e_{\text{ш}}S-\left(P+mg\right)}. \tag{14}$$

Тогда скорость бурения скважины определяется через эти параметры, м/с

$$V=h\omega, \tag{15}$$

а производительность бурения, м^3/с

$$\Pi_{\text{б}}=Sh\omega. \tag{16}$$

Приведенные выражения позволяют определить возможные значения параметров бурения h, ω, V, $\Pi_{\text{б}}$ как функции соответствующих параметров и времени.

Учитывая, что эти параметры являются случайными величинами, необходимо установить их плотности вероятности, математическое ожидание, дисперсию и другие моменты.

Для двухмерного марковского случайного нестационарного процесса уравнение ФПК может быть записано в виде

$$\frac{\partial p\ \left(h,\omega,t\right)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\omega\partial h}\left[f_1p\left(h,\omega,t\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\omega}\left[f_2p\left(h,\omega,t\right)\right]+\frac{\overset{\circ}{N}}{4m}\left[\frac{\partial^2\left(h,\omega,t\right)}{\omega^2\partial h^2}+\frac{\partial^2 p\left(h,\omega,t\right)}{h^2\partial\omega^2}\right], \tag{17}$$

где
$$f_1\left(h,\omega\right)=\frac{P}{m}+g-\frac{e_{\text{ш}}S}{m}\exp\left(\frac{e_{\text{ш}}Sh\omega}{D_x\omega^2}\right);$$

$$f_2(h,\omega) = \frac{h}{I} + (P + mg) + \frac{M_0}{I} - \frac{1}{I}(2D_x\omega - e_ш Sh)\exp\left(\frac{e_ш Sh\omega}{D\omega^2}\right);$$

$p\ (h,\omega,t)$ – нестационарная двумерная плотность вероятности координат системы; $\overset{\circ}{N}$ – случайная составляющая мощности диссипации энергии.

Таким образом, решение уравнения ФПК (2) позволяет аналитически определить нестационарную плотность вероятности $p(h,\omega,t)$. Тогда, используя совместную плотность вероятности, можно получить одномерную плотность вероятности каждого из параметров:

$$p(h,t) = \int_\omega p(h,\omega,t)d\omega; \qquad (18)$$

$$p(\omega,t) = \int_h p(h,\omega,t)dh. \qquad (19)$$

Математические ожидания параметров режима бурения определяются по формулам

$$\bar{h}(t) = \int_h h\,(t)p\,(h,t)\,dh; \qquad (20)$$

$$\bar{\omega}(t) = \int_\omega \omega(t)p(\omega,t)d\omega. \qquad (21)$$

Плотность вероятности для скорости бурения находится как для произведения двух случайных величин $V(t) = h(t)\omega(t)$, каждая из которых имеет свою одномерную плотность вероятности. Известно [1], что плотность вероятности для скорости бурения выражается через совместное распределение

$$p(V,t) = 2\int_0^\infty h^{-1}p(h,V/h,t)dh - 2\int_0^\infty h^{-1}p(h,V/h,t)dh. \qquad (22)$$

Соответственно, математическое ожидание скорости бурения станка определяется по выражению

$$\bar{V}(t) = \int_V V(t)\,p(V,t)dV, \qquad (23)$$

где $V(t) = h(t)\omega(t)$ – текущая скорость подачи как произведение решений уравнений (9) и (10).

Таким образом, исходное уравнение Лагранжа (6), уравнение ФПК (17), их решения и выражения (18)–(21) и (23) являются математической моделью случайного нестационарного процесса бурения скважин шарошечным инструментом.

Выводы

1. Процесс бурения скважины шарошечным долотом рассматривается как случайный нестационарный диссипативный процесс, для построения адекватной модели которого необходимо использовать принцип дуальности движения массы в пространстве.

2. Модель процесса разрушения горной породы шарошечным долотом представляет собой совокупность стохастических дифференциальных уравнений (уравнения Лагранжа, уравнения Эйлера, уравнения Гамильтона–Якоби или им эквивалентные), описывающих набор возможных траекторий движения породоразрушающего инструмента, а также уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), которые позволяют оценить вероятность каждой из возможных траекторий.

3. Технические и технологические параметры процесса бурения определяются по результатам моделирования с учетом случайного характера процесса с использованием полученных выражений.

1. *Крючков А. И.* Влияние вариации и корреляции параметров режима работы очистного комбайна на нагрузку лавы. Автореф. дис… канд. техн. наук / МГИ. – М., 1988. – 21 с.

2. *Крючков А. И.* Рівняння Гамільтона–Якобі при моделюванні детермінованого руху // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: Зб. наук. праць. – К.: НТУУ «КПІ». – Вип. 1. – 1999. – С. 48–51.

3. *Крючков А. И.* Наукові принципи і математичні моделі процесів гірничого виробництва // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: Зб. наук. праць. – К.: НТУУ «КПІ». – Вип. 2. – 2000. – С. 11–17.

4. *Крючков А. И.* Энергетические характеристики горных пород при разрушении // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: Зб. наук. праць. – К.: НТУУ «КПІ». – Вип. 6. – 2001. – С. 13–17.