УДК [622.261-1123:622.281]:519.25

А. Н. Шашенко, д.т.н., проф., **Е. А. Сдвижкова**, д.т.н., проф., **А. С. Ковров**, к.т.н., доц. (ГВУЗ «Национальный горный университет)

ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЧНОСТИ МОНОЛИТНОГО ПОРОДНОГО МАССИВА

A. N. Shashenko, Ye. A. Sdvyzhkova, O. S. Kovrov (SHEI «National Mining University»)

PROBABILISTIC-STATISTICAL MODEL OF THE MONOLITHIC ROCK MASS STRENGTH

Предложена и исследована вероятностно-статистическая модель прочности монолитного, ненарушенного трещинами, породного массива. Полагается, что вследствие естественной неоднородности структурные элементы, на основе которых определяется прочность горных пород (лабораторные стандартные образцы), обладают различающимися параметрами. Их пределы прочности в процессе тестирования принимают случайные значения, образующие статистическую совокупность. Исследованы нормальный и усеченный нормальный законы распределения предела прочности на одноосное сжатие. Получены формулы для коэффициента структурного ослабления, позволяющие оценить прочность статистически неоднородного породного массива.

Ключевые слова: *неоднородность горных пород, вероятностно-статистическая модель, нормальный и усеченный нормальный законы распределения, коэффициент структурного ослабления, предел прочности на одноосное сжатие.*

Запропонована і досліджена ймовірносно-статистична модель міцності монолітного, непорушного тріщинами, породного масиву. Покладається, що внаслідок природної неоднорідності структурні елементи, на основі яких визначається міцність гірських порід (лабораторні стандартні зразки), володіють різними параметрами. Їх межі міцності в процесі тестування приймають випадкові значення, що утворюють статистичну сукупність. Досліджено нормальний і усічений нормальний закони розподілу границі міцності на одновісний стиск. Отримано формули для коефіцієнта структурного ослаблення, що дозволяють оцінити міцність статистично неоднорідного породного масиву.

Ключові слова: *неоднорідність гірських порід, ймовірносно-статистична модель, нормальний і усічений нормальний закони розподілу, коефіцієнт структурного ослаблення, межа міцності на одноосьовий стиск.*

Probabilistic-statistical model of the monolithic and non-fractured rock mass strength is proposed and investigated. It is believed that because of the natural heterogeneity of the structural elements, which rock strength properties are determined via laboratory standard samples testing, have different parameters. Their ultimate strengths during the testing process assume random values constituting the statistical population. Normal and truncated normal distribution laws of ultimate strength in uniaxial compression are studied. The formulas for the coefficient of structural weakening for assessment of the strength of the statistically heterogeneous rock mass are obtained.

Keywords: *heterogeneity of rocks, a probabilistic-statistical model, normal and truncated normal distribution laws, coefficient of structural weakening, ultimate strength in uniaxial compression.*

Введение. Следуя статистическим теориям прочности [1, 2], монолитный породный массив, ненарушенный системами плоскостей ослабления (трещинами), можно представить как некоторый агрегат, состоящий из структурных элементов. В силу естественной неоднородности породной среды прочность структурных элементов является величиной случайной и подчиняется тому или иному закону распределения вероятностей с плотностью распределения $f(R)$ (рис. 1).

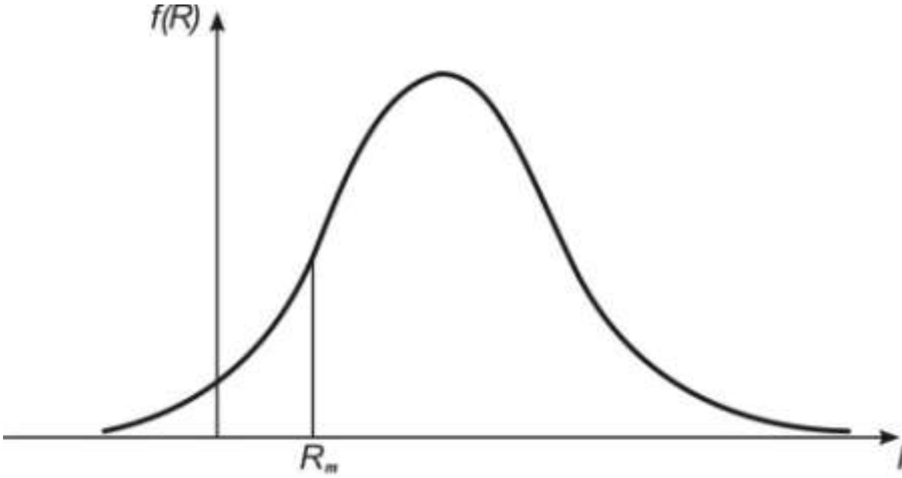

Рис. 1. Гипотетическое распределение прочности структурных элементов породного массива

Цель работы – исследовать вероятностно-статистическую модель прочности монолитного породного массива с использованием нормального и усеченного нормального законов распределения предела прочности на одноосное сжатие.

Отличие прочности массива (агрегата) R_m от математического ожидания прочности структурных элементов $M(R)$ оценивается коэффициентом структурного ослабления, равным

$$k_c = \frac{R_m}{M(R)}. \qquad (1)$$

Прочность массива должна оцениваться такой величиной R_m, чтобы прочность его структурных элементов (лабораторных образцов) с заданной надежностью были не меньше этого значения. Вероятность такого события определяется выражением

$$p(R \geq R_m) = 1 - F(R_m), \qquad (2)$$

где $F(R) = \int_{-\infty}^{R} f(x)dx$ – интегральная функция распределения величины R.

Разрешим это неравенство относительно величины R_m:

$$R_m = \arg F(1-P), \qquad (3)$$

где $arg\,F(1-P)$ – аргумент функции $F(R)$ при ее значении равном $1-P$.

Тогда коэффициент структурного ослабления определяется выражением:

$$k_c = \frac{\arg F(1-P)}{M(R)}, \qquad (4)$$

конкретный вид которого зависит от выбора функции распределения вероятностей $F(R)$ случайной величины R – прочности структурных элементов.

Как правило, выбор закона распределения осуществляют исходя из физической сути случайной величины и анализа статистической информации. Чаще всего, особенно в случае, когда объем такой информации невелик, исследователи в качестве вероятностной модели исследуемого количественного признака выбирают нормальный закон распределения. При этом руководствуются центральной предельной теоремой и законом больших чисел, из которых следует вывод: если варьирование случайной величины происходит под воздействием большого числа независимых факторов, причем влияние каждого из них незначительно по сравнению с совокупным воздействием других факторов, то распределение случайной величины подчиняется нормальному закону. Поскольку условия, определяющие нормальное распределение, встречаются часто, последнее получило широкое распространение. Достоинством нормального распределения является и то, что его параметры имеют ясный физический смысл.

Действительно, плотность распределения случайной величины, подчиненной закону Гаусса, имеет вид:

$$f(R) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(R-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5)$$

где a – математическое ожидание величины R; σ – ее среднеквадратическое отклонение.

Получим величину коэффициента структурного ослабления в предположении, что прочность структурных элементов массива распределена по нормальному закону. В этом случае неравенство (2) принимает вид

$$P(R \ge R_m) = 1 - F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right), \qquad (6)$$

где

$$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \ – \qquad (7)$$

нормированная функция нормального распределения.

Разрешим уравнение (6) относительно величины R_m:

$$F_0\left(\frac{R_m - a}{\sigma}\right) = 1 - P,$$

$$\frac{R_m - a}{\sigma} = \arg F_0(1-P),$$

где $t = \arg F_0(1-P)$ – аргумент функции (7) при ее значении $F_0(t)$, равном $1-P$.

Далее получим:

$$R_m = \sigma \cdot \arg F_0(1-P) + a.$$

Учитывая, что $M(R) = a$, разделив обе части полученного выражения на величину a, получим:

$$k_c = \frac{\sigma}{a} \cdot \arg F_0(1-P) + 1.$$

Здесь $\sigma/a = \eta$ – относительная вариация прочности структурных элементов. Окончательно выражение для коэффициента структурного ослабления принимает вид:

$$k_c = \eta \cdot \arg F_0(1-P) + 1. \qquad (8)$$

Итак, мы получили коэффициент структурного ослабления как величину, зависящую, во-первых, от относительной вариации η, которая по сути характеризует степень неоднородности среды; во-вторых – от вероятности P, которая характеризует собой уровень значимости объекта.

Определим, например, расчетное значение прочности на одноосное сжатие алевролита, если по данным испытаний среднее значение прочности лабораторных образцов $\overline{R}_c$ составляет 40 МПа, вариация значений составляет 30 % (η=0,3)

Из равенства (1) следует, что:

$$R_{расч} = R_m = \overline{R}_c \cdot k_c.$$

Зададимся вероятностью $P=0,95$. Определим значение аргумента t нормированной нормальной функции $F_0(t)$ при ее значении, равном $1-0,95=0,05$. Из [3] определим, что значению интегральной функции $F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, равном $F_0(t) = 0,05$, соответствует значение аргумента $t = -1,64$, то есть $\arg F_0(0,05) = -1,64$. Тогда коэффициент структурного ослабления равен:

$$k_c = 0,3 \cdot (-1,64) + 1 = 0,508.$$

Таким образом, расчетное значение прочности равно $R_{расч} = 0,508 \cdot 40 =$ = 21 МПа.

Анализируя график зависимости (8) (рис. 2), заметим, что при η >0,4, коэффициент структурного ослабления может принимать отрицательные значения, что, естественно, противоречит физической сути данной величины.

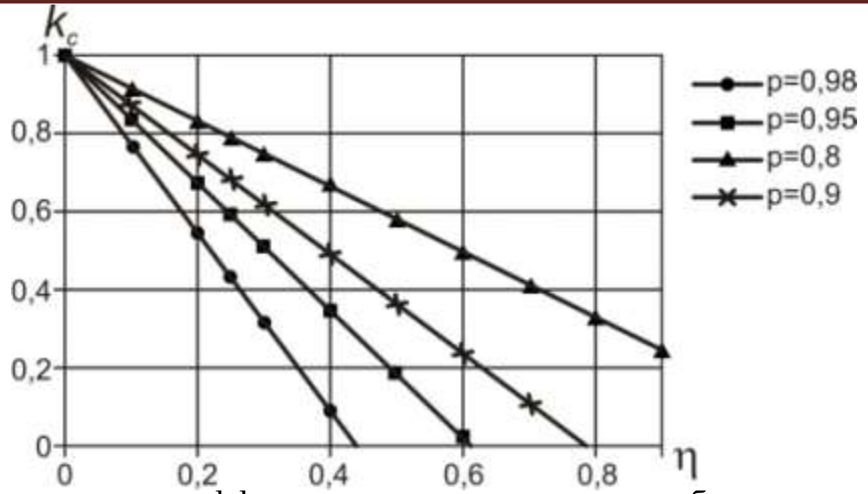

Рис. 2. Зависимость коэффициента структурного ослабления от вариации прочности структурных элементов в предположении нормального закона распределения их прочности

Очевидно, что это недостаток вероятностной модели. Действительно, интегрирование плотности нормального распределения автоматически предполагает наличие отрицательных значений величины R в пределах $-\infty \prec R \prec 0$. Именно количественная оценка в виде коэффициента структурного ослабления показывает недостаток нормального распределения: предел прочности на одноосное сжатие не может иметь отрицательных значений. Исходная вероятностная модель, привлекающая своей простотой, неадекватна рассматриваемому объекту и требует замены более совершенной. Такой более универсальной вероятностной моделью является нормальный усеченный закон распределения [4].

Плотность распределения случайной величины x для усеченного нормального закона имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty \prec x \prec x_1; \\ A\left[(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma\right]^{-1} \exp\left[-(x - x_0)^2 (2\sigma^2)^{-1}\right], & x_1 \prec x \prec x_2; \\ 0, & x_2 \prec x \prec \infty. \end{cases} \quad (9)$$

где x_0, σ^2 – соответственно первый начальный и второй центральный моменты статистического распределения.

Параметр A в уравнении (9) определяется из условия

$$A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du = 1, \quad (10)$$

где $u = \dfrac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}$.

Среднее значение прочности и дисперсия находятся из выражений

$$M(x) = x_0 + B\sigma, \quad (11)$$

$$D=\sigma^2\left\{1-B^2-A\left[\begin{array}{l}(x_2-x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-(x_1-x_0)^2/2\sigma^2\right]-\\-(x_1-x_0)\sigma^{-1}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-(x_1-x_0)^2/2\sigma^2\right]\end{array}\right]\right\}. \qquad (12)$$

Обозначим

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^{(x_i-x_0)/\sigma}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du=\Phi\left[(x_1-x_0)/\sigma\right],$$
$$\exp\left[-(x_i-x_0)^2(2\sigma^2)^{-1}\right]=(2\pi)^{\frac{1}{2}}f\left[(x_i-x_0)\sigma^{-1}\right]. \qquad (13)$$

Тогда величины *A, B, D* определятся выражениями

$$A=1/\left[\Phi\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)\right],$$
$$B=f\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)-f\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)/\Phi\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right), \qquad (14)$$
$$D=\sigma^2\left\{1-B^2-A\left[\frac{x_1-x_0}{\sigma}f\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)-\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)f\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Решим задачу об оценке прочности породного массива для усеченного нормального закона распределения. Прочность массива, как и в предыдущем случае, оценивается величиной *x* с такой надежностью, чтобы при расчетах она с вероятностью *p* не принимала значений меньше x_m. Вероятность того, что случайная величина *x* не окажется ниже значения x_m, равна:

$$p(x_m\prec x\prec x_2)=1-A(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{(x_1-x_0)/\sigma}^{(x_m-x_0)/\sigma}\exp(-u^2/2)du..$$

С учетом обозначений (13) и (14) получим:

$$p=1-\left[\Phi\left(\frac{x_m-x_0}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)\right]/\left[\Phi\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)\right].$$

Решим последнее равенство относительно x_m – основной характеристики прочности массива:

$$x_m=x_0+\sigma\arg\Phi\left[(1-p)\Phi\left(\frac{x_2-x_0}{\sigma}\right)+p\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sigma}\right)\right]. \qquad (15)$$

Полученная формула прочности породного массива должна определиться относительно статистических характеристик для усеченного нормального закона распределения, т.е. в формуле (15) вместо x_0 необходимо взять величину *M(x)* из (11), а вместо σ соответственно $\sqrt{D}$ из (14). Получим:

$$x_m=M(x)+\sqrt{D}\,\arg\Phi\left[(1-p)\Phi\left(\frac{x_2-x_0}{\sqrt{D}}\right)+p\Phi\left(\frac{x_1-x_0}{\sqrt{D}}\right)\right].$$

Поделив все члены полученного выражения на математическое ожидание *M(x)*, найдем формулу для определения коэффициента структурного ослабления:

$$k_c = 1 + \eta \arg\Phi\, 1 - p\, \Phi\left(\frac{x_2 - x_0}{\sqrt{D}}\right) + p\Phi\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{D}}\right). \tag{16}$$

Таким образом, получены формулы, позволяющие определить расчетную прочность породного массива и коэффициент структурного ослабления, показывающий, насколько необходимо уменьшить прочность горной породы, найденную при испытании выборки образцов как математическое ожидание усеченного нормального закона, чтобы иметь расчетное значение прочности. Уровень надежности полученных оценок определяется заданием вероятности p, которая зависит от технической или производственной значимости проектируемого объекта. На рис. 3 приведены графики, показывающие, как зависит ошибка, возникающая при использовании нормального закона распределения вместо усеченного нормального закона, более адекватно описывающего реальный породный массив. Из графиков следует, что в зависимости от уровня надежности, при коэффициенте вариации, не превышающем 0,2-0,3, ошибка составляет 10-13% и в этих условиях можно применять нормальный закон распределения и вытекающие из него более простые зависимости. При более же высоком уровне неоднородности породного массива ошибка становится существенной и следует использовать зависимости (15), (16), полученные на основе усеченного нормального закона распределения.

Практическое использование усеченного нормального распределения связано только с одним неудобством: для определения параметров теоретического распределения кроме средней выборочной и выборочной дисперсии (именно эти величины приводят исследователи как результат статистической обработки стандартных испытаний образцов) необходимо располагать крайними выборочными значениями x_1 и x_2, которые, будучи полученными только из одной серии испытаний, не являются несмещенными оценками своих теоретических аналогов.

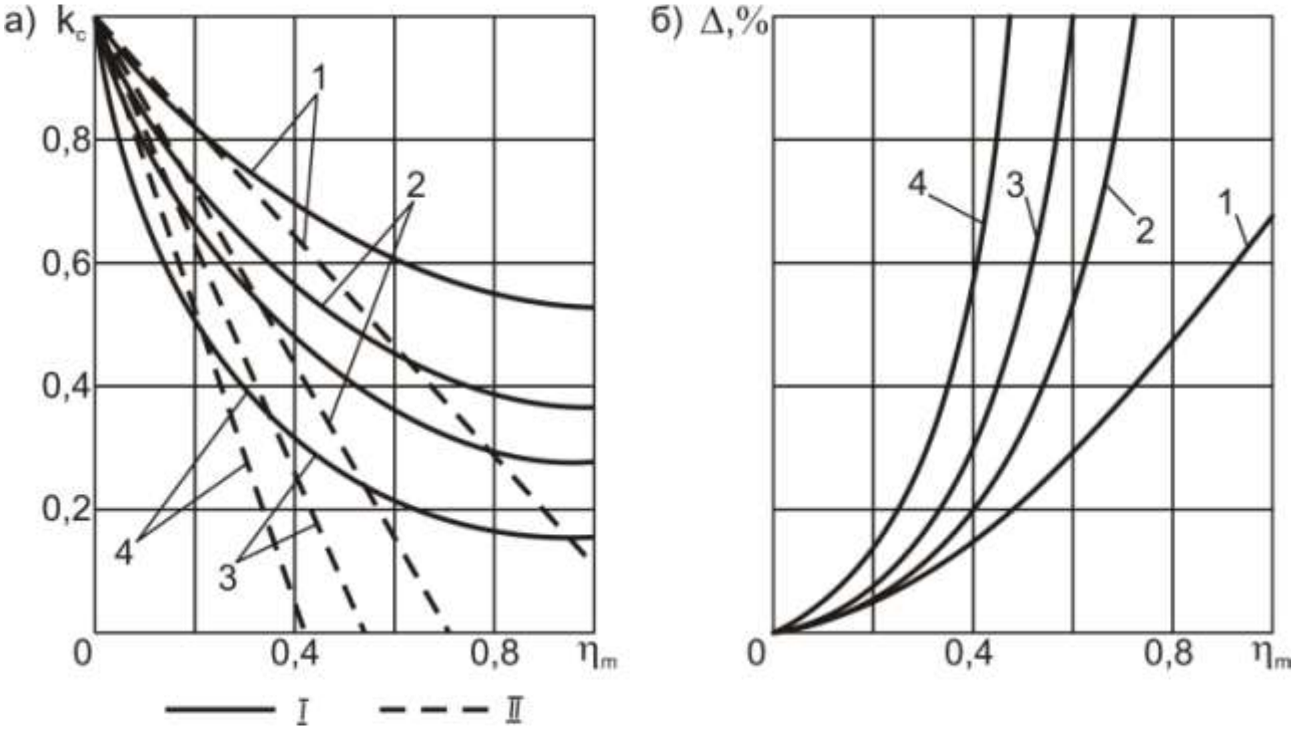

Рис. 3. Зависимость коэффициента структурного ослабления (а) и относительной ошибки вычисления (б) от относительной вариации прочности и уровня надежности:

I –усеченный нормальный закон распределения;
II – нормальный закон распределения; 1,2,3,4 – р=0,8; 0,9; 0,95; 0,99 соответственно

Нормальный закон распределения удовлетворительно описывает только те величины, вариация которых не превышает 33 % (это вытекает из правила «трех сигм»). Обычно для результатов лабораторного опробования образцов большой разброс данных не характерен. Вариация прочности образцов при этом не превосходит 30-35%, а статистическое распределение, построенное по выборке, близко к нормальному.

Так, большой объем испытаний образцов для углевмещающих пород Донбасса был выполнен в лабораториях Национального горного университета. Гистограммы относительных частот значений прочности образцов пород приведены в [3].

Для статистических данных были определены эмпирические начальные m_k и центральные μ_k моменты распределения:

$$m_k = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n} R_i^k, \tag{17}$$

$$\mu_k = \frac{1}{n_B}\sum_{i=1}^{n} (R_i - m_1)^k, \tag{18}$$

где n_B– объем выборки, k – порядок момента, R_i – значения прочности образцов.

С центральными моментами второго, третьего и четвертого порядков связаны нормированные показатели асимметрии β_1 и эксцесса β_2:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}. \tag{19}$$

Обобщенные результаты обработки статистических данных в виде квадрата показателя асимметрии β_1 и показателя островершинности β_2, сведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры статистического распределения

Марки углей	Вмещающие породы	Параметры распределения	
		β_1^2	β_2
Д-ДГ	Аргиллит Алевролит Песчаник	0,261 0,336 0,213	3,099 2,970 2,421
Г-ГЖ	Аргиллит Алевролит Песчаник	0,637 0,545 0,470	2,623 2,875 3,123
Ж, КЖ, ОС	Аргиллит Алевролит Песчаник	1,043 0,336 0,514	5,029 2,970 3,003

В [5] подбор распределений по экспериментальным данным рекомендуется осуществлять с помощью графика Пирсона, на котором в осях координат β_1^2, β_2 построены кривые, соответствующие различным теоретическим распределениям. В работе [6] этот график дополнен точками и кривыми, представляющими распределения: параболическое, логистическое, Берра, Максвелла, Релея, Гумбеля, Бернштейна и Фреше. Распределения, имеющие только два параметра (положения и масштаба), изображаются на графике точкой. К ним относятся распределения: равномерное, параболическое, нормальное, Максвелла, Релея, логистическое, минимальных и максимальных значений Гумбеля.

Кривые с тремя параметрами (третий – параметр формы) изображены линиями $\beta_1^2 = \varphi(\beta_2)$. К ним относятся распределения: минимальных и максимальных значений Вейбулла, гамма, Бернштейна, логарифмически нормальное (Гальтона), Берра, минимальных и максимальных значений Фреше. Бета-распределение, имеющее два параметра формы, занимает на этом графике определенную область.

Точки с координатами (β_1^2, β_2), полученные как результат обработки испытаний образцов, нанесены на график Пирсона (рис. 4).

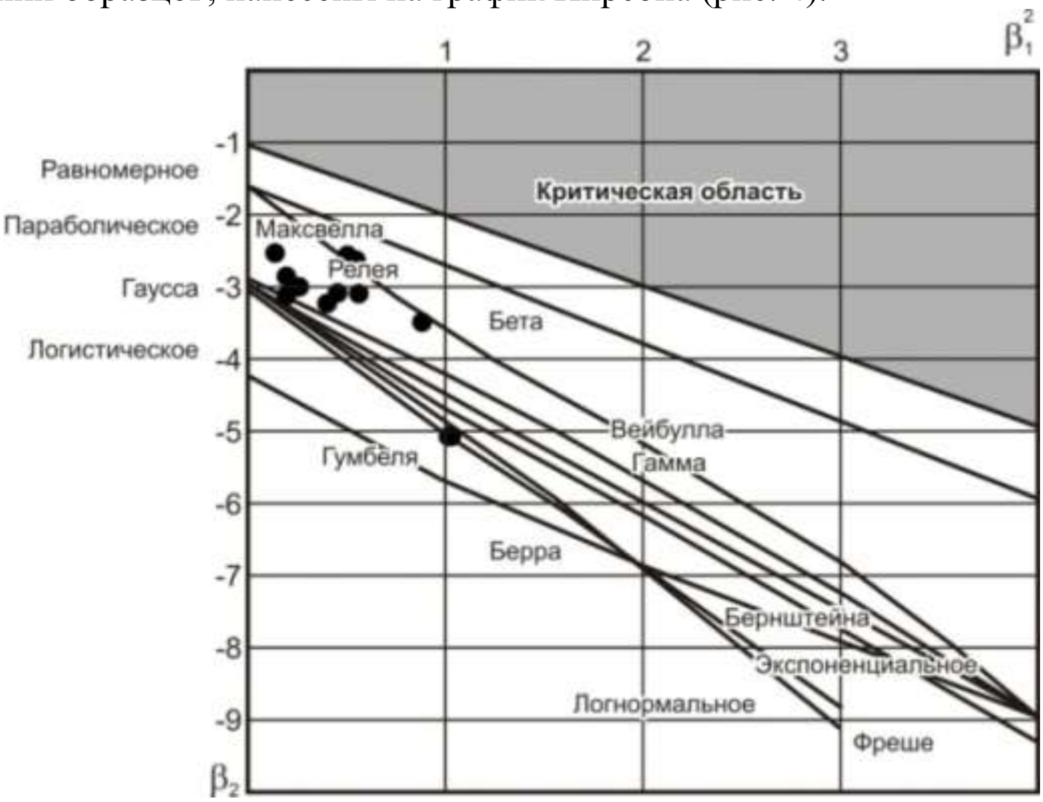

Рис. 4. График Пирсона для различных распределений случайных величин

Видно, что большинство эмпирических точек группируются в некоторой области, близко расположенной к точке, соответствующей нормальному распределению (для нормального распределения β_1^2=0, β_2=3). На этом основании можно выдвинуть гипотезу о распределении прочности образцов на одноосное сжатие по нормальному закону.

При этом, очевидно, что кривая Гаусса не вполне отвечает физической природе тех величин, которые по своей сути не могут быть отрицательными. В [7] отмечается, что теоретически хорошо обоснованный нормальный закон распределения является скорее исключением, чем правилом, которому следуют природные явления.

Исследуя прочность структурных элементов породного массива, реальными «представителями» которых являются образцы, изготовленные из отобранных проб, следует обратить внимание на следующие обстоятельства.

Действительно ли выборка, полученная как результат опробования образцов горной породы, отражает природу генеральной совокупности? Выполняется ли основное требование, предъявляемое к выборке – равенство шансов для всех элементов генеральной совокупности попасть в выборку?

Известно, что горной породе присуща естественная трещиноватость. При изготовлении образцов те из них, которые пересечены трещиной, разрушаются до начала испытаний. Таким образом, структурные элементы, содержащие макродефекты, в обычных испытаниях не участвуют, но как реально существующие должны быть включены в статистику опробования. Очевидно, наличие нарушенных элементов, то есть элементов, прочность которых значительно ниже прочности ненарушенных элементов, изменит все характеристики выборки, а, следовательно, все моменты распределения, для которых характеристики выборки являются точечными оценками. Соответственно изменится и закон распределения прочности структурных элементов, составляющих основу того или иного породного массива.

Выводы

В статье предложена вероятностно-статистическая модель прочности структурно-неоднородного породного массива ненарушенного системами трещин. Рассмотрены нормальный и усеченный нормальный законы распределения прочности структурных элементов, в качестве которых приняты результаты испытаний в лаборатории породных образцов. Предложены формулы для коэффициента структурного ослабления, позволяющие определить прочность неоднородного породного массива.

Список использованных источников

1. Седракян, Л.Г. К статистической теории прочности / Л.Г. Седракян; Изд-во Ереванского института стройматериалов и сооружений. – Ереван, 1958. – 104 с.
2. Болотин, В.В. Изменчивость пределов прочности хрупких материалов и ее связь с масштабным эффектом // Строительная механика и расчет сооружений / В.В. Болотин, 1960. – № 4. – С. 1-7.
3. Шашенко, А.Н. Деформируемость и прочность массивов горных пород: монография / А.Н. Шашенко, Е.А. Сдвижкова, С.Н. Гапеев. – Д.: Національний гірничий університет, 2008. – 224 с.
4. Струнин, Б.М. Вероятностное описание поля напряжений при случайном распределении дислокаций / Б.М. Струнин // Физика твердого тела. – Т.13. – №3. – С. 923-926.
5. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах / Г. Хан, С. Шапиро.– М.: Мир, 1969. – 388 с.
6. Рубец, Г.Т. Исследование изменчивости прочностных характеристик при помощи логнормального распределения и методы оценки его параметров / Г.Т. Рубец // Механика и разрушение горных пород.– К.: Наукова думка, 1976.– Вып. 3.– С. 39-43.
7. Карасев, Б.В. Статистический подход к изучению природы и некоторые закономерности распределения вещества Земли / Б.В. Карасев // Пути познания Земли.– М.: Наука, 1971.– С. 131–151.

Статья поступила в редакцию 11.07.2015 г.