

## ВЛИЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕНИЯ И УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*В. Г. Кравец, докт. техн. наук (НТУУ «КПИ»), П. З. Луговой, докт. техн. наук, Н. Я. Прокопенко, канд. техн. наук (Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ)*

*Розроблено методику визначення власних частот і форм коливань прямокутних в плані пологих ребристих оболонок на пружній основі, що враховує дискретне розміщення ребер. На прикладі квадратної в плані пологої циліндричної оболонки досліджено вплив коефіцієнтів пружної основи Вінклера і Пастернака та числа підкріплюючих ребер на власні частоти і форми коливань. Виявлено, що зі зміною величини коефіцієнтів пружної основи відбувається не лише зміна величини власних частот коливань, а й зміна форми коливань. Врахування дискретного розміщення ребер треба проводити при підкріпленні оболонки малим числом ребер.*

*Ключові слова: полого циліндрична оболонка, ребра, пружна основа, власні частоти, форми коливань.*

*Разработана методика определения собственных частот и форм колебаний прямоугольных в плане пологих ребристых оболочек на упругом основании, учитывающая дискретное размещение ребер. На примере квадратной в плане пологой цилиндрической оболочки исследовано влияние коэффициентов упругого основания Винклера и Пастернака и числа подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний. Обнаружено, что с изменением величины коэффициентов упругого основания происходит не только изменение величины собственных частот колебаний, но и изменение формы колебаний. Учет дискретного размещения ребер следует проводить при подкреплении оболочки малым числом ребер.*

*Ключевые слова: пологая цилиндрическая оболочка, ребра, упругое основание, собственные частоты, формы колебаний.*

*The technique of determination of the eigenfrequencies and corresponding modes of the wave creation under vibration of the shallow ribbed shells rectangular in plane on the elastic foundation, taking into account a discrete arrangement of ribs is developed. The influence of Winkler and Pasternak elastic foundation coefficients on the eigenfrequencies and corresponding modes is studied on the example of shallow cylindrical shell square in plane reinforced with stringers and rings. It was shown that the change of coefficients foundation leads not only to change of the eigenfrequencies, but to the change of modes. It is necessary to account the discrete ribs arrangement when the number of ribs is few.*

*Key words: shallow cylindrical shell, ribs, elastic foundation, eigenfrequencies, modes.*

**Введение.** Подземные газо- и нефтехранилища, трубопроводы, тоннели, подкрепленные горные выработки и многие другие инженерные сооружения представляют собой оболочечные конструкции, которые контактируют с окружающей средой. Для длительной и безаварийной их эксплуатации необходимо знать их собственные частоты и формы колебаний, которые в значительной мере определяют реакцию указанных выше конструкций на действующие на них рабочие и аварийные нагрузки. В связи с этим

исследования собственных характеристик оболочек на упругом основании является достаточно актуальным.

Изучению колебаний ребристых пологих оболочек с прямоугольным планом посвящено достаточно большое число работ [1–3]. В отличие от известных работ здесь основное внимание уделено исследованию влияния упругого основания и количества подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний таких оболочек. Исследование проведено на основе теории пологих ребристых оболочек [1], учитывающей дискретное размещение ребер. Упругое основание характеризуется коэффициентами постели Винклера и Пастернака [4, 5].

**1. Исходные соотношения.** Рассматриваются пологие цилиндрические оболочки с шарнирно опертыми краями, подкрепленные продольными и кольцевыми ребрами. Уравнения движения изотропных пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом, полученные в рамках классической теории оболочек [3] с учетом воздействия упругого основания, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
& + F_1 \sum_{j_1=1}^{k_1} \delta(x_2 - x_{2j_1}) \left[ E_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - h_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) - \rho_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - h_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial t^2} \right) \right] \Bigg|_{x_2=x_{2j_1}} = 0, \\
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_2 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
& + F_2 \sum_{j_2=1}^{k_2} \delta(x_1 - x_{1j_2}) \left[ E_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - h_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \rho_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - h_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \right] \Bigg|_{x_1=x_{1j_2}} = 0, \\
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ -\frac{\nu}{R} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{R^2} u_3 \right] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta u_3 + \rho_0 h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \\
& - C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + C_1 u_3 + \sum_{j_1=1}^{k_1} \left\{ \delta(x_2 - x_{2j_1}) \left[ E_1 (F_1 h_1^2 + I_{x_2 1}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} - E_1 F_1 h_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_1 F_1 \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial t^2} - h_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial t^2} \right) \right] + \frac{d\delta(x_2 - x_{2j_1})}{dx_2} G_1 I_{kp1} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\} \Bigg|_{x_2=x_{2j_1}} + \\
& + \sum_{j_2=1}^{k_2} \left\{ \delta(x_1 - x_{1j_2}) \left[ -\frac{E_2 F_2}{R} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{u_3}{R} \right) + E_2 (F_2 h_2^2 + I_{x_1 2}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_2 F_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - h_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \right] + \frac{d\delta(x_1 - x_{1j_2})}{dx_1} G_2 I_{kp2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right\} \Bigg|_{x_1=x_{1j_2}} = 0, \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{E_2 F_2 h_2}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - E_2 F_2 h_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} - \rho_2 F_2 \left( \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial t^2} - h_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2 \partial t^2} \right) \Bigg] + \\
& \left. + \frac{d\delta(x_1 - x_{1j_2})}{dx_1} G_2 I_{kp2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right\} \Bigg|_{x_1 = x_{1j_2}} = 0,
\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2$  – декартовы координаты точки на срединной поверхности обшивки;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора перемещений этой точки;  $t$  – время;  $h$  – толщина обшивки;  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, из которого изготовлена обшивка;  $F_1, I_1, I_{z1}, I_{kp1}$  – площадь поперечного сечения стрингеров и, соответственно, его моменты инерции при изгибе в плоскости, нормальной к срединной поверхности обшивки, при изгибе в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, и при кручении;  $h_1$  – расстояние от оси стрингера до срединной плоскости обшивки ( $h_1 > 0$ , если ребро размещено в направлении внешней нормали к обшивке),  $E_1, G_1, \rho_1$  – соответственно модуль упругости и модуль сдвига, а также плотность материала, из которого изготовлены стрингеры;  $k_1$  – число стрингеров;  $F_2, I_2, I_{z2}, I_{kp2}, h_2, E_2, \rho_2, k_2$  – аналогичные величины для шпангоутов;  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака;  $x_{2j_1}, x_{1j_2}$  – координаты осей  $j_1, j_2$  ребер соответственно первого и второго направления.

Решение системы уравнений движения (1) разыскивается в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \cos \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2}, \\
u_2 &= \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn} \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \cos \frac{\pi n x_2}{a_2}, \\
u_3 &= \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2},
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $\omega$  – круговая частота.

После подстановки (2) в (1) задача определения собственных частот колебаний сводится к нахождению корней редуцированных систем алгебраических уравнений, а определение собственных форм колебаний – к решению указанных систем.

**2. Влияние упругого основания и подкрепления на собственные частоты и формы колебаний.** Исследование влияния упругого основания на собственные частоты  $\omega_i$  и формы колебаний проведено на примере квадратной

в плане полой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом и стрингером по центральным сечениям.

Расчеты производились для полой ребристой оболочки, имеющей следующие геометрические и механические характеристики:

$$\nu = 0,3; \frac{h}{a} = 0,01; \frac{a}{R} = 0,1; \frac{E_1}{E} = \frac{E_2}{E} = 1; \frac{G_1}{E} = \frac{G_2}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)}; \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho} = 1;$$

$$k_1 = k_2 = 1; \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{a} = 0,055; \frac{F_1}{ah} = \frac{F_2}{ah} = 0,2; \frac{I_1}{a^3h} = \frac{I_2}{a^3h} = 0,1667 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{I_{z1}}{a^3h} = \frac{I_{z2}}{a^3h} = 0,6667 \cdot 10^{-5}; \frac{I_{kp1}}{a^3h} = \frac{I_{kp2}}{a^3h} = 0,2328 \cdot 10^{-4}; \left( \bar{C}_1 = \frac{C_1(1-\nu^2)a^2}{Eh} \right) (\text{табл. 1});$$

$$\bar{C}_2 = C_2 / Eh (\text{табл. 2}).$$

Таблица 1. Результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от значений параметра постели Винклера  $\bar{C}_1$

$\bar{C}_1$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,002	0,836	0,849	0,923	0,934	1,830
0,004	0,856	0,867	0,943	0,954	1,842
0,006	0,876	0,885	0,963	0,974	1,855
0,008	0,896	0,903	0,983	0,994	1,867
0,010	0,916	0,922	1,003	1,014	1,879
0,012	0,936	0,940	1,023	1,034	1,892
0,014	0,966	0,967	1,053	1,064	1,910
0,016	0,975	0,976	1,063	1,074	1,917

Таблица 2. Значения первых пяти собственных частот в зависимости от изменения параметров постели Пастернака  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$

$\bar{C}_1; \bar{C}_2$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0; 0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,01; 0,0001	0,925	0,927	1,011	1,022	1,886
0,01; 0,0002	0,932	0,933	1,020	1,031	1,893
0,01; 0,0003	0,937	0,941	1,029	1,040	1,900
0,01; 0,0004	0,942	0,950	1,037	1,048	1,908
0,01; 0,0005	0,947	0,958	1,046	1,057	1,915

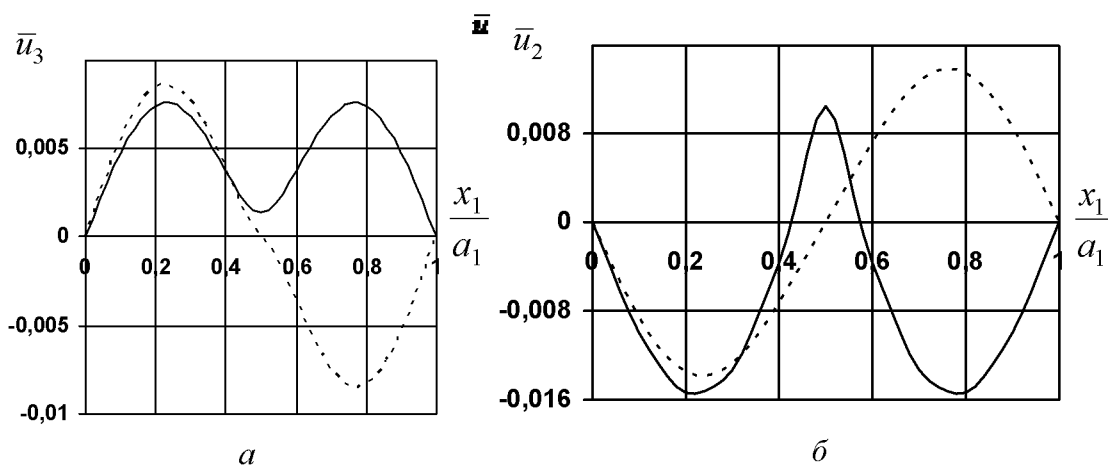


Рис. 1. Формы изменения прогиба  $\bar{u}_3$  и перемещения в окружном направлении  $\bar{u}_2$  по длине оболочки для минимальных частот  $\omega_1^2 = 0,093$  (сплошная линия) и  $\omega_1^2 = 0,092$  (пунктирная линия) соответственно для  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0002$  и  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0001$

На рис. 1, *а* и *б* показаны соответственно формы изменения прогиба  $\bar{u}_3$  и перемещения в окружном направлении  $\bar{u}_2$  по длине оболочки, полученные для минимальных частот  $\omega_1^2 = 0,093$  и  $\omega_1^2 = 0,092$  соответственно для  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0002$  и  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0001$ . Хотя незначительное изменение коэффициентов постели  $C_1$  и  $C_2$  приводит к несущественному изменению значений минимальной частоты, но при этом происходит изменение формы колебаний. Как следует из рис. 2, *а*, пунктирная кривая, соответствующая случаю, когда  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0001$ , свидетельствует о том, что при реализации этой формы колебаний ребра работают только на кручение и изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, а сплошная кривая, соответствующая случаю, когда  $\bar{C}_1 = 0, \bar{C}_2 = 0,0002$ , показывает, что при такой форме колебаний ребра практически не деформируются.

Результаты анализа полученных данных говорят о том, что с изменением величины коэффициентов постели упругого основания происходит изменение не только величины собственных частот колебаний, но и формы колебаний.

В табл. 3 приведены результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от числа шпангоутов  $k_2$ , когда  $k_2 = 1$  и коэффициент постели Винклера  $\bar{C}_1 = 0,02$ .

Таблица 3. Результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от числа шпангоутов  $k_2$

$k_2$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
1	1,011	1,016	1,114	1,114	1,942
2	1,461	2,495	2,564	2,585	2,616
3	1,581	5,131	5,652	5,700	5,774
4	1,614	6,220	10,95	10,97	11,08

На рис. 2 показано изменение формы прогиба  $\bar{u}_3$  по длине оболочки при подкреплении ее одним, двумя, тремя и четырьмя шпангоутами, равномерно расположенными по длине оболочки. Расположение ребер показано по оси абсцисс кружочками, крестиками и квадратиками. Из рисунка видно, что с увеличением числа шпангоутов происходит изменение формы прогиба по длине оболочки.

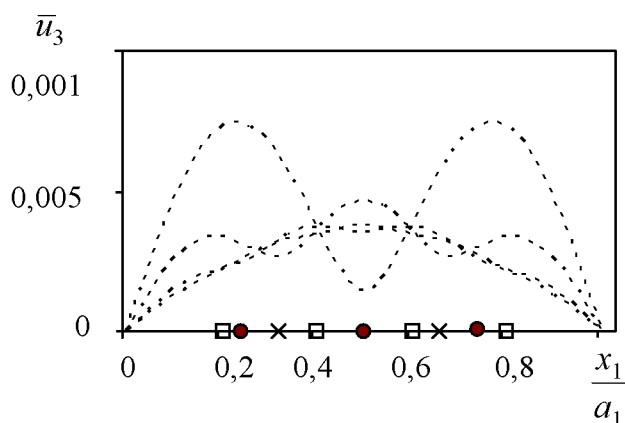


Рис. 2. Изменение формы прогиба  $\bar{u}_3$  по длине оболочки при подкреплении ее одним, двумя, тремя и четырьмя шпангоутами

Так, при подкреплении одним шпангоутом, расположенным посередине длины оболочки, наблюдается деформация оболочки, когда ребро практически не деформируется, при подкреплении двумя шпангоутами ребра изгибаются и закручиваются, а при подкреплении тремя и четырьмя шпангоутами оболочка деформируется по одной полуволне. Отсюда следует вывод о том, что дискретное размещение ребер следует учитывать при подкреплении оболочки малым количеством ребер. При большом количестве ребер расчет можно выполнять по конструктивно ортотропной схеме.

### Выводы

Результаты анализа полученных данных показывают, что с увеличением коэффициентов упругого основания происходит изменение не только величины собственных частот колебаний, но и формы колебаний. Дискретность размещения ребер следует учитывать при малом количестве подкрепляющих ребер.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке НАН Украины и Российского ФФИ (проект № 08-01-10)

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 386 с.
2. Амиро И. Я., Заруцкий В. А. Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ, 1990. – Т. 21. – С. 132–191.
3. Заруцкий В. А., Прокопенко Н. Я. Колебания и устойчивость пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 6. – С. 84–90.

4. *Луговий П. З., Подільчук І. Ю., Головка К. Г.* Про вплив пружної основи на поширення гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 98–106.

5. *Луговий П. З., Прокопенко Н. Я.* Колебания пологих ребристых цилиндрических оболочек с прямоугольным планом // Математичні проблеми технічної механіки. Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2009, 3(62). – С. 34–39.