ГЕОМЕХАНІКА

УДК 622.235: 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА–ДВУХСЛОЙНАЯ ГРУНТОВАЯ СРЕДА

В. Ф. Мейш, докт. физ.-мат. наук (Институт механики НАН Украины), Ю. А. Мейш, канд. физ.-мат. наук (НТУ)

Розглядається задача поширення хвиль у системі циліндрична оболонка–двошарове ґрунтове середовище. Ґрунт моделюється рівняннями нелінійного трикомпонентного середовища. Для чисельного розв'язання зв'язаної задачі оболонка–ґрунт використовується скінченно-різницева схема Мак-Кормака. Отримані чисельні результати дозволяють аналізувати хвильові процеси в системі в залежності від параметрів циліндричної оболонки та параметрів ґрунтового середовища.

Ключові слова: трикомпонентне ґрунтове середовище, циліндрична оболонка, хвильові процеси, чисельні методи.

Рассмотрена задача распространения волн в системе цилиндрическая оболочка–двухслойная грунтовая среда. Грунт моделируется уравнениями нелинейной трехкомпонентной среды. Для численного решения связанной задачи оболочка–грунт применяется конечно-разностная схема Мак-Кормака. Полученные численные результаты позволяют анализировать волновые процессы в системе в зависимости от параметров цилиндрической оболочки и параметров грунтовой среды.

Ключевые слова: трехкомпонентная грунтовая среда, цилиндрическая оболочка, волновые процессы, численные методы.

The problem of wave propagation in system cylindrical shell–two-layer soil is presented. Soil is simulated by equations of nonlinear three-component medium. For the numerical solution of the connected problem Mac-Cormack finite-difference scheme is used. The obtained numerical results allow analyzing the wave processes in the system depending on the parameters of cylindrical shell and the parameters of soil medium.

Key words: three-component soil medium, cylindrical shell, wave processes, numerical methods.

Введение. Вопросам взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой при нестационарных нагрузках посвящено значительное число работ. Взаимодействие деформируемых оболочек с грунтовыми средами рассмотрено в работах [1–5]. Деформируемые преграды выполняют роль гасителя нестационарных волн и в определенной мере защищают грунтовую среду от повреждений. В ряде случаев использование деформируемых преград позволяет регулировать величину и характер нестационарных воздействий на грунт. Полученные закономерности протекания волновых процессов в указанных структурах позволяют прогнозировать их динамическое поведение и могут применяться при построении более простых математических моделей для исследования объектов типа оболочка–грунт, оболочка на упругом основании и т. д. [4, 6].

Изложение основного материала исследований. Рассматривается бесконечная подкрепленная цилиндрическая полость в двухслойной грунтовой среде. Предполагается, что к внутренней поверхности подкрепляющей оболочки при $r = r_0$ приложена распределенная импульсная нагрузка $P_3(t)$.

Уравнения движения подкрепляющей тонкой цилиндрической оболочки радиусом R и толщиной h имеет вид

$$\rho_{об} h\ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t), \tag{1}$$

где $P_3(t)$ – нагрузка на внутреннюю поверхность оболочки; $P_r(t)$ – давление грунта на оболочку; u_3 – радиальное перемещение оболочки; $\rho_{об}$, E, ν – физико-механические параметры материала оболочки.

Для описания поведения слоев грунтовой среды используется модель нелинейной жидкой многокомпонентной среды согласно В. М. Ляхову [7, 8]. Уравнение состояния данной модели записываются в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1\right]^{-\chi_i}, \tag{2}$$

где $\chi_i = 1/\gamma_i$, γ_i – показатель изентропы i-й компоненты.

Для уравнения состояния трехкомпонентной среды (водонасыщенного грунта) (2) вводятся следующие обозначения: α_i – содержание по объему компонент; ρ_{i0} – плотность; V_{i0} – удельный объем; c_{i0} – скорость звука в компонентах при атмосферном давлении P_0; i – номер компоненты (1 – воздух, 2 – жидкость, 3 – твердые частицы). При давлении $P = P_0$ плотность среды ρ_0 и удельный объем V_0 определяется по формулам

$$\rho_0 = \frac{1}{V_0} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \rho_{i0}, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1.$$

Характеристики каждого слоя определяются соответствующими величинами α_i, ρ_{i0}.

Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения цилиндрических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [9]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\rho U^2 + P\right)\right] - \frac{1}{r}P = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\rho U)\right] = 0,$$

где r – пространственная координата; t – временная координата; U – скорость; ρ – плотность; P – давление.

Уравнения движения грунтовой среды (3) дополняются уравнением состояния (2) вида $F(P, \rho) = 0$, где

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left[\frac{\gamma_i (P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \tag{4}$$

Связанность задачи взаимодействия обеспечивается заданием условия непротекания на деформируемой поверхности контакта оболочка–грунтовая среда

$$\dot{u}_3 = U_r, \tag{5}$$

где U_r – скорость границы грунтовой среды.

В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимаются уравнения (1), (5) при $r = r_0$ и условия невозмущенного движения на бесконечности. На границе контакта грунтов с разными плотностями задаются условия непрерывности скорости.

Алгоритм решения задачи о распространении цилиндрических волн в грунтовой средой (уравнения (3)–(4)) основывается на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [4, 10].

На шаге предиктор разностные уравнения имеют вид:

$$\tilde{\rho}_k = \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\rho^n V^n)_{k+1} - (r\rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right]; \tag{6}$$

$$(\tilde{\rho}\tilde{V})_k = (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left\{ \frac{[r(\rho V^2 + P)^n]_{k+1} - [r(\rho V^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - P_k^n \right\}.$$

$$F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0.$$

На шаге корректор уравнения записываются следующим образом:

$$\rho_k^{n+1} = 0{,}5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r\tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}]}{\Delta r} \right] \right\}; \tag{7}$$

$$(\rho V)_k^{n+1} = 0{,}5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}\tilde{V})_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{[r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})]_k - [r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})]_{k-1}}{\Delta r} - \tilde{P}_k \right] \right\};$$

$$F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для нахождения величины давления P по заданным значениям плотности ρ в уравнении (4) используется итерационная процедура Ньютона–Рафсона. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака (6), (7) является явной, то при расчетах использовалось условие устойчивости: $(|V| + c)\tau / \Delta r < 1$, где величина c соответствует локальной скорости звука [7, 8, 10].

При расчетах полагалось, что подкрепляющая цилиндрическая оболочка имеет следующие параметры: радиус $R = 0{,}1$ м; модуль Юнга материала оболочки $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$; плотность $\rho = 7{,}88 \cdot 10^3$ кг/м^3. Толщина оболочки h варьировалась. Рассматривалось три случая: $h / R = 0{,}05$; $h / R = 0{,}1$; $h / R = 0{,}15$.

Нагрузка $P_3(t)$, прикладываемая к внутренней поверхности оболочки при $r = r_0$, задавалась зависимостью $P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)]$, где $A = 10^7$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с, $\eta(t)$ – функция Хевисайда.

Первый слой грунтовой среды при $r_0 \le r \le 5r_0$ характеризуется параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0{,}7$; $\alpha_3 = 0{,}3$. Для второго слоя при $5r_0 \le r \le \infty$ полагалось: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0{,}3$; $\alpha_3 = 0{,}7$. Для обоих случаев в формуле (2) задавалось $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3, $\rho_3 = 2650$ кг/м^3; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 1 приведены зависимости волны давления P по пространственной координате r в определенные моменты времени. Кривая 1 соответствует случаю $h / R = 0{,}05$ при $t = 0{,}625T$. Кривые *2* и *3* соответствуют случаям $h / R = 0{,}1$ и $h / R = 0{,}15$ при $t = 0{,}75T$. На рис. 2 приведены зависимости волны давления P в момент достижения ними границы раздела грунтовой среды $r = 5r_0 - t = 6{,}25T$. При прохождении границы раздела волны давления в данном случае (прохождение волны из менее плотной среды в более плотную среду) наблюдается отраженная волна. В правой части рис. 3 представлена основная волна давления для рассматриваемых трех случаев отношения h / R . В левой части рис. 3 изображена отраженная волна давления, движущаяся по направлению к полости. Представленные на рис. 3 зависимости соответствуют времени $t = 10T$. В дальнейшем отраженная волна при достижении подкрепленного края полости затухает. Эффекта отражения от оболочки не наблюдается. Это объясняется спецификой расчетной математической модели. Обозначения на рис. 2 и рис. 3 аналогичны обозначениям на рис. 1.

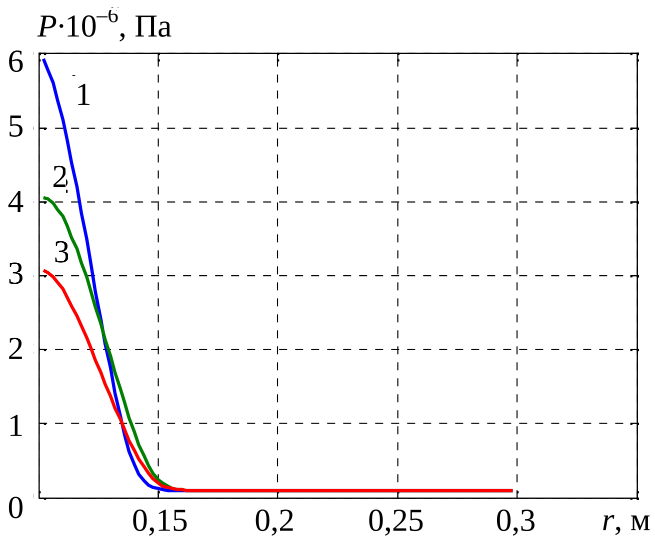

Рис. 1. Зависимости волны давления P от пространственной координаты r в определенные моменты времени

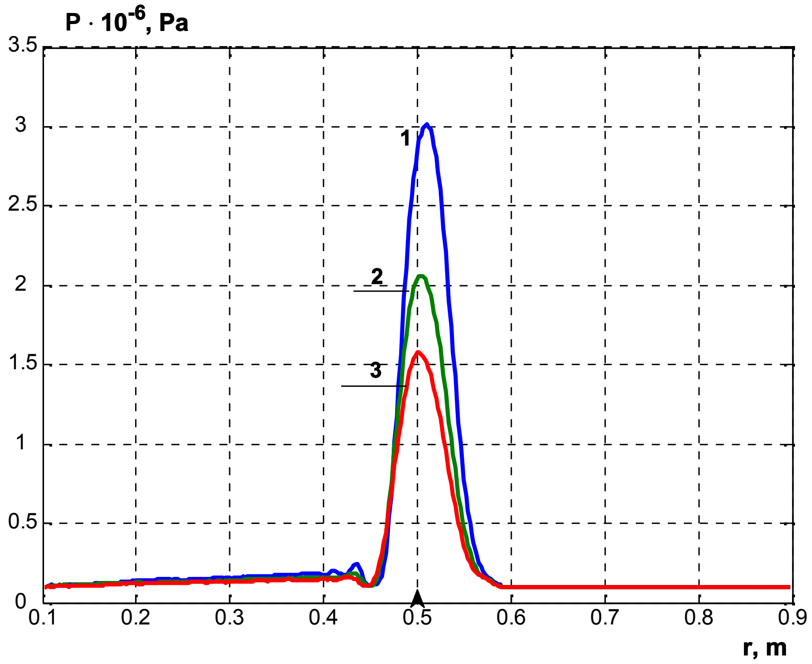

Рис. 2. Зависимости волны давления P от пространственной координаты r в момент времени прохождения границы раздела сред

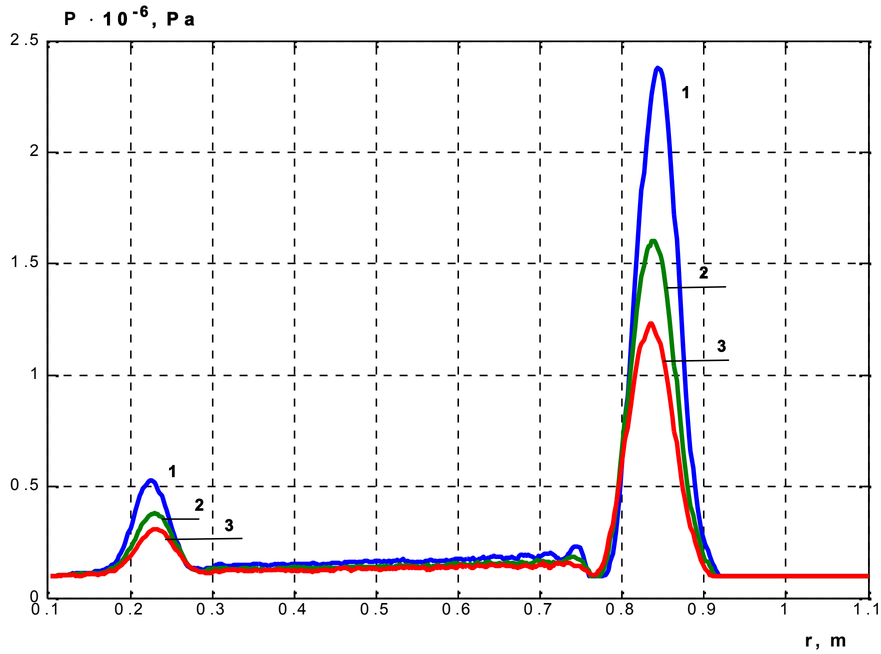

Рис. 3. Зависимости волны давления P от пространственной координаты r в момент времени $t = 10T$

Выводы. Численное решение связанной задачи цилиндрическая оболочка–двухслойная грунтовая среда при действии внутренней импульсной нагрузки дает возможность регулировать параметры входной волны давления в грунт в зависимости от геометрических и физико-механических параметров оболочки и грунтовой среды. Полученные числовые результаты позволяют прогнозировать волновые процессы в неоднородной грунтовой среде при прохождении волн через контактную границу слоев грунта в зависимости от их параметров.

1. *Баженов В. Г.* Численное решение двумерных нестационарных задач взаимодействия тонкостенных конструкций с грунтовыми средами / В. Г. Баженов, А. В. Кочетков, С. В. Крылов, В. Р. Фельдгун // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т, 1984. – С. 52–59.

2. *Кочетков А. В.* Нестационарное взаимодействие тонкостенных конструкций с ударными волнами в грунтовых средах / А. В. Кочетков, С. В. Крылов, В. Р. Фельдгун // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т, 1985. – С. 60–65.

3. *Баженов В. Г.* Деформирование цилиндрических оболочек в мягкой грунтовой среде под действием внутреннего импульсного нагружения / В. Г. Баженов, А. В. Кочетков, В. Р. Фельдгун // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький: Горьковский ун-т, 1989. – С. 87–95.

4. *Головко К. Г.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К. Г. Головко, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А. Н. Гузя. – К.: Изд.-полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

5. *Луговий П. З.* До розв'язку динамічних задач теорії оболонок в грунтовому середовищі при імпульсних навантаженнях / П. З. Луговий, В. Ф. Мейш, Ю. А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет. – 2010. – Вип. 14. – С. 230–238.

6. *Луговой П. З.* Волновые процессы в подкрепленных цилиндрических оболочках на упругом основании при импульсных нагрузках / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, К. Г. Головко // Вісник НТУУ „КПІ". Серія „Гірництво": Зб. наук. праць. – К.: НТУУ „КПІ". – 2006. – Вип. 14. – С. 31–37.

7. *Ляхов В. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / В. М. Ляхов. – М.: Недра, 1982. – 288 с.

8. *Лучко И. А.* Механический эффект взрыва в грунтах / И. А. Лучко, В. А. Плаксий, Н. С. Ремез и др. – К.: Наук. думка, 1989. – 232 с.

9. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко. – М.: Наука, 1978. – 688 с.

10. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 5526 с.

Надійшла до редакції 25.11.2012 р.
Рекомендовано до друку докт. техн. наук П. З. Луговим