

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ КОПАННЯ ЕКСКАВАТОРА ТИПУ МЕХЛОПАТА

A. I. Крючков, канд. техн. наук, Л. I. Євтесєва, інж. (НТУУ «КПІ»)

Рассмотрено копание грунта ковшом экскаватора типа мехлопата как вероятностный, динамический, нестационарный, диссипативный процесс и его математическая модель.

Ключевые слова: экскаватор, ковш, копание, модель, вероятность.

Розглянуто копання ґрунту ковшем екскаватора типу мехлопата як імовірнісний динамічний нестаціонарний дисипативний процес та його математична модель.

Ключові слова: екскаватор, ковш, копання, модель, ймовірність.

Digging of soil by the scoop of power shovel as probabilistic, dynamic, non-stationary, dissipative process and its mathematical model is discussed.

Key words: power shovel, scoop, digging, model, probability.

Вступ. Продуктивність устаткування є найважливішою і визначальною характеристикою будь-якого технічного процесу. При оцінці продуктивності екскаваторів прийнято розрізняти теоретичну, технічну та експлуатаційну продуктивність.

Під теоретичною (паспортною) продуктивністю розуміють продуктивність на елементарному циклі копання при коефіцієнті наповнення ковша $k_h = 1$, гострих зубах, номінальній потужності двигуна, повороті на розвантаження на кут $\pi/2$.

Технічна продуктивність враховує тою чи іншою мірою відхилення перелічених параметрів від їх паспортних значень.

При визначенні експлуатаційної продуктивності обов'язково враховується і використання екскаватора в часі.

Аналіз стану проблеми. Ю.І. Беляков, С.А. Паляничко і В.М. Матушенко запропонували визначати технічну продуктивність кар'єрних мехлопат ($\text{м}^3/\text{год}$) за формулою [1]

$$Q_T = \frac{3600 E K_e}{\frac{EK_e K_p K_F}{102\eta N_{\Pi}} + t_{\Pi} + t_p}, \quad (1)$$

де N_{Π} – потужність підйомного двигуна, кВт; η – ККД робочого устаткування мехлопати; t_{Π} і t_p – час на повороти і розвантаження ковша; E – об'єм ковша, м^3 ; K_e – коефіцієнт експлуатації; K_F – коефіцієнт опору гірської породи копанню; K_p – коефіцієнт розпушування гірничої маси.

Змінну продуктивність екскаватора ($\text{м}^3/\text{зміну}$) з урахуванням впливу якості гірничої маси пропонується визначати за формулою [2]

$$Q_C = Q_T T_C K_{\Gamma} K_O K_{\Pi}, \quad (2)$$

де T_C – тривалість зміни, годин; K_T – коефіцієнт готовності екскаватора; K_T – коефіцієнт впливу транспорту; K_O – коефіцієнт використання екскаватора в часі по організаційно-технічним причинам; K_{Π} – коефіцієнт, що враховує пайову участь екскаватора по породах з різними властивостями.

П. І. Томаков [3] пропонує визначати змінну продуктивність екскаватора ($\text{м}^3/\text{зміну}$) з виразу

$$Q_C = \frac{3600 \cdot E}{t_{\Pi}} K_e K_T (T_C - t_p), \quad (3)$$

де t_{Π} – тривалість циклу, с; t_p – час регламентованих і організаційних перерв, годин.

Продуктивність екскаватора при розробці родовищ кольорових металів Б. П. Юматов рекомендує визначати з урахуванням якості подрібнення гірничої маси і витрат часу на селективну виїмку [4].

А. Н. Туренко [5] пропонує розраховувати продуктивність екскаватора ($\text{м}^3/\text{с}$) на блоці за формулою

$$\Pi_B = \frac{1}{\frac{1}{\Pi_K} - \frac{\sum t_H}{V_B}}, \quad (4)$$

де Π_K – продуктивність копання (черпання) екскаватора на блоці, $\text{м}^3/\text{с}$; $\sum t_H$ – сумарний час непродуктивних допоміжних операцій при відпрацюванні блоку, с; V_B – об'єм масиву на блоці, м^3 .

На основі цих або аналогічних виразів було розроблено ряд інженерних методик розрахунку продуктивності екскаваторів. Порівняння результатів розрахунків за цими методиками з фактичною продуктивністю екскаватора дає коефіцієнт кореляції в діапазоні 0,18...0,26 залежно від типу екскаватора і умов експлуатації. Ці дані свідчать про практичну відсутність зв'язку між фактичними і розрахунковими значеннями продуктивності.

Таким чином, усі зазначені і подібні до них методики розрахунку продуктивності екскаватора, побудовані на простих моделях процесу екскавації, можна віднести до детермінованих статичних консервативних моделей. В той же час аналіз основних технологічних процесів гірничого виробництва свідчить про те, що вони є ймовірнісними, динамічними, нестационарними і дисипативними процесами.

Низький кореляційний зв'язок фактичної і розрахункової продуктивності є додатковим підтвердженням про неадекватність традиційних математичних моделей, покладених в основу існуючих методик розрахунку, процесу копання. Таким чином, математична модель процесу копання теж має бути ймовірнісною, динамічною, нестационарною, дисипативною.

У технологічних моделях немає сенсу виділяти теоретичну, технічну та експлуатаційну продуктивності. Доцільно виділити лише два типи продуктивності – продуктивність копання і експлуатаційну змінну продуктивність екскаватора.

Для реалізації сформульованого підходу при моделюванні процесу роботи екскаватора типу кар'єрна мехлопата необхідно розробити такі математичні моделі: модель процесу копання (черпання) екскаватора; модель використання екскаватора в часі; модель середньої експлуатаційної змінної продуктивності екскаватора.

Всі перелічені моделі також повинні бути ймовірнісними, динамічними, нестационарними і дисипативними.

Метою статті є встановлення залежності між продуктивністю копання екскаватора та технічними і технологічними чинниками з використанням ймовірнісної, динамічної, нелінійної, дисипативної моделі процесу копання, що значно підвищує адекватність і достовірність відповідної методики розрахунку.

Розроблення та аналіз математичної моделі процесу копання екскаватора типу мехлопата. Копання забійного блоку здійснюється ковшом екскаватора, який відокремлює від масиву окремі порції ґрунту – стружку. Поняття «стружка» є достатньо умовним, оскільки при відділенні ґрунту від масиву немає суцільності через структурну і агрегатну неоднорідність порід.

Стружка має свої параметри – товщину a і ширину b (рис. 1). Довжина стружки (шлях копання) l_k залежить від режиму копання. Отже, зняття стружки і наповнення ковша породою – це основний фізичний і технологічний процес в роботі екскаватора.

При русі ковша відносно забою в результаті силової взаємодії ріжучої кромки із забоєм знімається порція ґрунта, яка й надходить в ківш. Ґрунт в місці контакту із зубами ковша знаходиться в граничному напруженому стані, що забезпечує процес його руйнування.

Для аналізу процесу копання введемо поняття «поточна продуктивність копання» (m^3/s):

$$\Pi_k(t) = a b V_k, \quad (5)$$

де a – поточна товщина стружки, м; b – ширина ковша, м; V_k – швидкість копання, м/с.

Експериментальні та теоретичні дослідження дозволили встановити, що процес копання є складним ймовірнісним динамічним нестационарним процесом. Тому задачу вивчення процесу копання ґрунта ковшом екскаватора можна сформулювати як дослідження стохастичного нестационарного руху тіла змінної маси в просторі з дезінтеграцією суцільного дисипативного середовища, що має нелінійний опір.

Для отримання математичної моделі такого процесу застосуємо принцип дуальності при русі маси в просторі і відповідний математичний апарат у вигляді рівняння Гамільтона–Якобі [6]

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -\frac{(\nabla D_i)^2}{2m_i} - U_i + R_i \quad (6)$$

і рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [7]

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{D_i}{2m_i} \nabla^2 \omega_i + \frac{D_i}{m_i} \nabla \omega_i + \frac{U_i}{D_i} \omega_i, \quad (7)$$

де D_i – дія; m_i – рухома маса; U_i – потенціальна енергія; R_i – дисипативна функція; ω_i – тривимірна перехідна щільність вірогідності координат траєкторії руху маси в просторі.

Рівняння Гамільтона–Якобі може бути замінене еквівалентним рівнянням Лагранжа, що дозволяє перейти до криволінійної системи координат і значно спростити задачу [6]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n Q_j - R, \quad (8)$$

де $L_i = T_i - U_i$ – функція Лагранжа; q_i і \dot{q}_i – узагальнені координати маси і їх похідні за часом; Q_i – узагальнені рушійні сили; R – сили опору руху.

Кінетична енергія ковша з ґрунтом визначається як для тіла змінної маси:

$$T = \frac{m V_K^2}{2} = \frac{1}{2} (m_0 + \rho \alpha \nu l_k) \cdot V_K^2, \quad (9)$$

де m_0 – маса порожнього ковша, кг; ρ – щільність ґрунту в ковші, кг/м³; α – товщина стружки, що знімається, м; ν – ширина стружки (ковша), м; l_k – довжина стружки (шлях копання), м.

Отже, кінетична енергія наповненого ковша залежить від двох змінних: довжини стружки l_k і швидкості копання V_K .

Потенціальна енергія ковша з ґрунтом записується таким чином:

$$U = (m_0 + \rho \alpha \nu l_k) g h_K. \quad (10)$$

Після підстановки значень T і U у вираз (8) і диференціювання по відповідних змінних отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial V_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial l_k} = (m_0 + \rho \alpha \nu l_k) \cdot \frac{dV_K}{dt} + \frac{1}{2} \rho \alpha \nu V_K^2 + \rho g \alpha \nu h_k. \quad (11)$$

За винятком невеликої початкової ділянки траєкторією руху ковша є лінія, близька до кола з радіусом R_K . При цьому на рух витрачається в основному потужність двигуна підйому. Привід підйому ковша характеризується так званою м'якою «екскаваторною» характеристикою при постійній споживаній потужності

$$N_K = P_K \cdot V_K = \text{const}. \quad (12)$$

Сумарне зусилля опору копанню на ковші екскаватора при його заглибленні в масив прийнято оцінювати за залежністю Н. Г. Домбровського, що враховує пропорційність сили P_K площині стружки S і коефіцієнту опору породи копанню K_F . Останній еквівалентний середньому тиску, що

розвивається в забої при дії сили P_k , прикладеної через ріжучу кромку ковша до умовного поперечного перерізу S (м^2) відокремлюваної стружки.

В основу класифікації гірських порід за складністю їх виймання (класифікація Домбровського–Белякова) [2] покладено коефіцієнт опору породи копанню K_F . Класифікація включає шість категорій ($K_F = 0,025 \dots 1,0 \text{ МПа}$). Наведено значення K_F стосовно умов роботи мехлопат з ковшами об'ємом $3 \dots 5 \text{ м}^3$. Для інших моделей вводиться поправка.

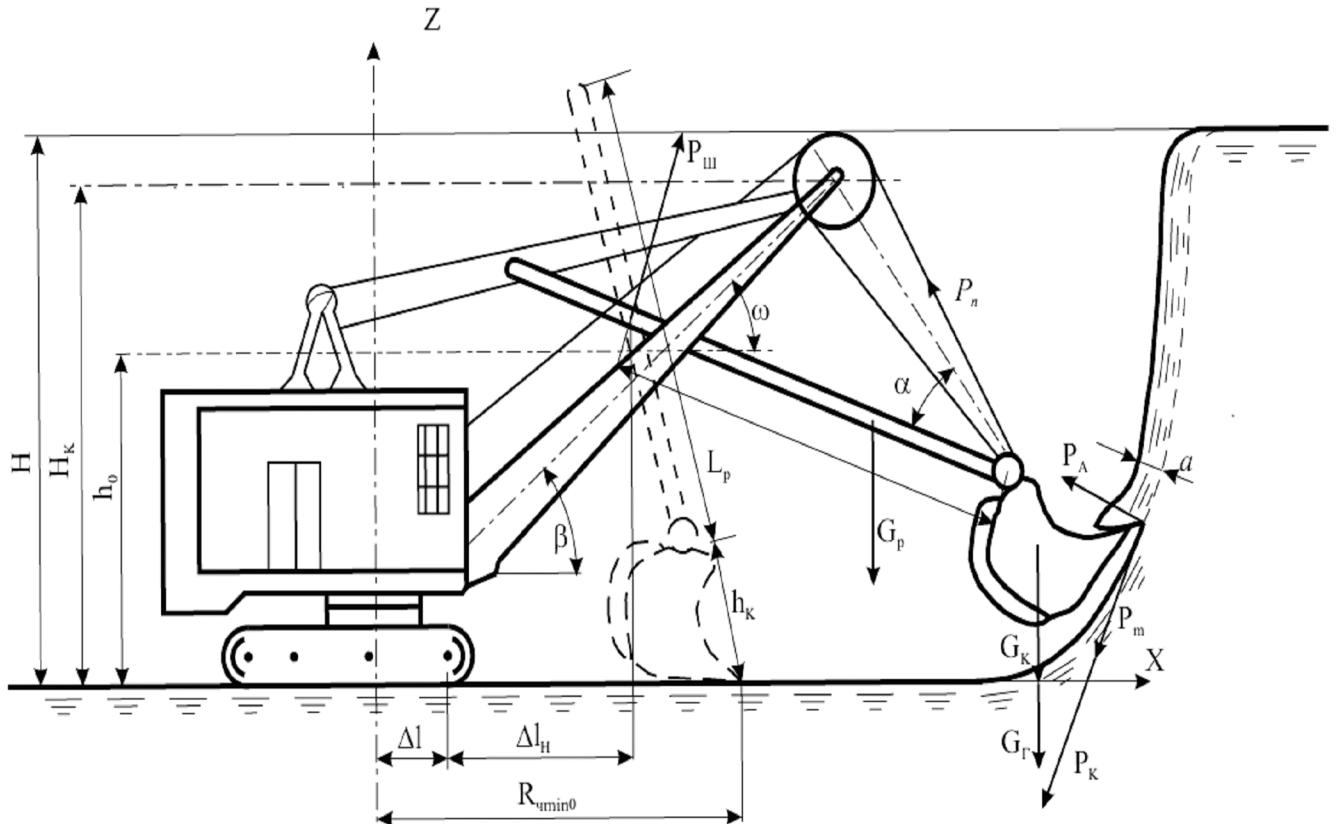


Рис. 1. Забій мехлопати

На основі достатнього числа експериментальних даних Н. Г. Домбровський запропонував визначати силу копання на ковші екскаватора при його заглибленні в масив за залежністю

$$P_K = S \cdot K_F, \quad (13)$$

де K_F – коефіцієнт опору гірської породи копанню, $\text{Н}/\text{м}^2$; S – площа зрізу породи, м^2 .

Коефіцієнт опору копанню Н. Г. Домбровський пропонує визначати експериментально з урахуванням всіх опорів, що виникають при взаємодії з породою. Встановлено [3], що коефіцієнт опору породи копанню залежить від швидкості копання.

Одним із завдань дослідження є сполучення методу розрахунку питомого динамічного опору порід копанню при різних швидкостях копання з

класифікацію Ю. І. Белякова. Розрахунок ведеться для одноковшового екскаватора ЕКГ-5А. З формули (13) отримуємо

$$K_F = \frac{P_V + P_{\text{ПР}} + P_{\text{ЗАП}}}{S}, \quad (14)$$

де P_V – сила різання, що враховує швидкість різання і може бути представлена у вигляді [1]:

$$P_V = \left(1 + \frac{\sin \delta}{\sqrt{\tau_0 / \gamma_{\text{ОБ}}} \cdot \sin(\delta + \theta)} \cdot V_k \right) \cdot \left[P + \frac{\sin \delta \cdot \cos \theta}{\sin(\delta + \theta)} \cdot \gamma_{\text{ОБ}} \cdot S \cdot V_k^2 \right], \quad (15)$$

де $\tau_0 = c \cdot \operatorname{tg} \mu_* \cdot (A + ctg \rho)$ – граничне дотичне напруження при зсуві; A – коефіцієнт, що залежить від кута різання δ , внутрішнього θ і зовнішнього тертя; $P_{\text{ПР}}$ – сила для подолання опору призми волочіння; $P_{\text{ЗАП}}$ – сила для подолання опору заповненню ковша.

Процес копання ведеться по послідовній напіввільній схемі. В цьому випадку площа зрізу дорівнює:

$$S = h_3 (n b_3 + a_3 (n + 0,5) + 0,5 h_3 \operatorname{ctg} \rho), \quad (16)$$

де h_3 – величина заглиблення зуба, м; n – кількість зубів на ковші; b_3 – ширина зуба, м; a_3 – відстань між зубами, м; ρ – кут нахилу бічних сторін частини прорізу, що розширюється, град.

Розрахунок питомого опору копанню проведено на ЕОМ при різних швидкостях копання для різних категорій порід. Початковими даними при розрахунку K_F є параметри ковша, властивості породи, умови взаємодії ковша з ґрунтом.

Для ЕКГ-5А прийнято такі параметри ковша: висота ковша = 1,54 м; ширина ковша = 2,05 м; число зубів у ковші = 5; ширина зуба = 0,16 м; відстань між зубами = 0,31 м.

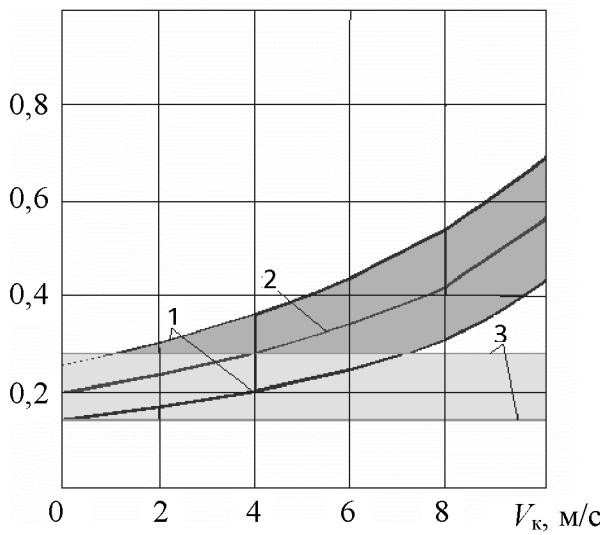
За результатами розрахунку побудовані динамічні характеристики опору гірських порід копанню для мехлопати ЕКГ-5А, при різних швидкостях копання (мал. 2).

Від швидкості копання коефіцієнт опору породи копанню K_F залежить складним чином, але в першому наближенні залежність можна представити у вигляді кубічного полінома

$$K_F = K_{F0} + K_1 \cdot V_K + K_2 \cdot V_K^2 + K_3 \cdot V_K^3. \quad (17)$$

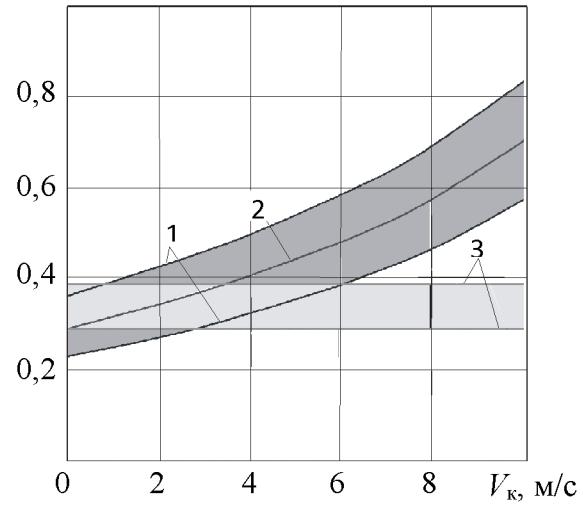
Тоді з урахуванням рушійних сил і динамічного опору ґрунта рівняння Лагранжа (11) для процесу копання прийме вигляд

K_F , МПа



a

K_F , МПа



b

Рис. 2. Динамічні характеристики опору гірських порід копанню для мехлопати ЕКГ-5А: 1 – границі зміни динамічного коефіцієнта опору копанню; 2 – математичне очікування коефіцієнта K_F (середнє значення); 3 – границі статичних значень коефіцієнта K_F ; а – 3-я категорія гірських порід, б – 4-а категорія гірських порід

$$m \frac{d\Pi_K}{dt} + \frac{\rho}{2} \Pi_K^2 - \frac{NS^2}{\Pi_K} + (K_1 \Pi_K + K_2 \Pi_K^2 + K_3 \Pi_K^3) \cdot S^2 + (\rho g h_K + K_{F0}) \cdot S^2 = 0, \quad (18)$$

де $m = m_0 + \rho a \nu \int_0^{t_K} \Pi_K dt$ – змінна маса при заповненні ковша породою, кг;

$\Pi_K = a \nu V_K$ – випадкова величина поточної продуктивності копання, $\text{м}^3/\text{s}$; N – номінальна потужність двигуна підйому, Вт; $S = a \nu$ – площа стружки, що знімається, м^2 .

Отримане рівняння є звичайним диференціальним нелінійним рівнянням із змінними коефіцієнтами і описує всі можливі траєкторії руху маси m в даному середовищі, які відрізняються одна від одної своєю вірогідністю.

У зв'язку з тим, що рівняння (18) є нелінійним, його розв'язання пов'язане із значними труднощами. Одним із спрощуючих підходів є метод лінеаризації. Нелінійну квадратичну, гіперболічну і кубічну залежності необхідно розкласти в ряд Тейлора відносно характерної точки і обмежитися тільки лінійними членами. В результаті цих перетворень отримаємо

$$\frac{d\Pi_K}{dt} + a\Pi_K = \beta, \quad (19)$$

де коефіцієнти

$$a = \frac{\rho \Pi_0}{m} + \frac{NS^2}{\Pi_0^2 m} + \frac{K_1 S^2}{m} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{\rho \Pi_0^2}{2m} + \frac{2NS^2}{m \Pi_0} - \frac{\rho g h S^2}{m} - \frac{K_{F0} S^2}{m}. \quad (21)$$

Це лінійне рівняння, рішення якого добре відоме [6]:

$$\Pi_K(t) = C \cdot e^{-\int_a^t dt} + \frac{\beta}{\alpha}. \quad (22)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\Pi_K(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{-at} \right). \quad (23)$$

За характерну точку відліку при лінеаризації було взято продуктивність Π_0 при номінальному режимі роботи приводу на ґрунтах 3-ї категорії ($K_{F0} = 0,16$ МПа) з відповідною паспортною тривалістю копання [7]. Отримане рішення вірне при невеликих відхиленнях від паспортних режимів для кожної категорії порід.

Щільність імовірності координат будь-якої з описуваних рівнянням (18) траєкторій може бути визначена з рівняння ФПК:

$$\frac{\partial \omega(\Pi_K, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \omega(\Pi_K, t)}{\partial \Pi_K} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 \omega(\Pi_K, t)}{\partial \Pi_K^2}, \quad (24)$$

де $\omega(\Pi_K, t)$ – перехідна щільність вірогідності; α і β – коефіцієнти з рівняння (20) та (21).

Рішення цього рівняння запишемо у вигляді

$$\omega(\Pi_K, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} [\sigma_\Pi^2 (1 - e^{-2\alpha t}) + \sigma_0^2 \cdot e^{-2\alpha t}]} \exp \left\{ -\frac{\Pi_K^2 - [\Pi_K - \Pi_0 (1 - e^{-2\alpha t})]^2 - \Pi_0^2 e^{-2\alpha t}}{2[\sigma_\Pi^2 (1 - e^{-2\alpha t}) + \sigma_0^2 \cdot e^{-2\alpha t}]} \right\}, \quad (25)$$

де $\sigma_\Pi^2 = \frac{\gamma^2 \cdot \sigma_{KF}^2}{\alpha^2}$ – дисперсія поточної продуктивності копання; $\sigma_0^2 = \beta^2 \sigma_{KF}^2 / \alpha$ – дисперсія продуктивності копання в паспортному режимі; $\gamma = S^2 / m$.

Стационарний розв'язок рівняння ФПК можна отримати граничним переходом ($t \rightarrow \infty$)

$$\omega(\Pi_K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\Pi} e^{-\frac{\Pi_K - \bar{\Pi}_K}{\sigma_\Pi^2}}. \quad (26)$$

Це класичний закон Гауса, якому і підкоряється щільність вірогідності продуктивності копання екскаватора в стационарному режимі.

Отже, розв'язок лінеаризованного рівняння Лагранжа (20) описує стационарне і нестационарне значення продуктивності копання і є вірним для будь-якої випадкової траєкторії руху ковша в забої залежно від часу і відповідних параметрів, що входять в коефіцієнти α і β :

$$\Pi_K(t) = f_1(\rho, a, \beta, m_0, l_k, t_k, K_F, N). \quad (27)$$

У свою чергу стаціонарний і нестаціонарний (25) розв'язки рівняння ФПК описують щільність вірогідності координат будь-якої з цих траєкторій теж залежно від параметрів, що входять в коефіцієнти α і β :

$$\omega(\Pi_K, t) = f_2(\rho, \alpha, \beta, m_0, l_k, t_k, K_F, N). \quad (28)$$

Цих результатів досить, щоб визначити:
математичне очікування (середнє значення) продуктивності копання

$$\bar{\Pi}_K(t) = \int_{\Pi_K} \Pi_K(t) \omega(\Pi_K, t) d\Pi_K; \quad (29)$$

дисперсію відхилення можливих значень продуктивності копання від найбільш імовірних значень

$$D[\Pi_K, t] = \int_{\Pi_K} [\Pi_K(t) - \bar{\Pi}_K(t)]^2 \omega(\Pi_K(t)) d\Pi_K. \quad (30)$$

Висновки

Проведений аналіз процесу копання і подальші аналітичні викладення дозволяють зробити такі висновки.

1. Процес копання є стохастичним нестаціонарним дисипативним процесом, і для його математичного опису необхідно застосувати принцип дуальності при русі маси в просторі.

2. Випадкові значення можливих координат траєкторії руху ковша екскаватора в забої описуються рівнянням Гамільтона–Якобі або рівнянням Лагранжа. Конкретні значення їх залежать від набору врахованих параметрів, і кожна траєкторія від сусідньої відрізняється своєю вірогідністю.

3. Динаміку процесу враховано за рахунок того, що виявлено залежність опору масиву від швидкості копання. Це дозволило уточнити розподіл ґрунтів на категорії за опором руйнування ковшом екскаватора не тільки в статиці, а й при різних швидкостях копання.

4. Щільність перехідної вірогідності координат кожної з траєкторій є розв'язком рівняння ФПК. У стаціонарному випадку розв'язком є щільність імовірності Гауса.

5. Математичне очікування продуктивності копання визначається з виразу (29), а дисперсія – з виразу (30).

6. Використання запропонованих імовірнісних динамічних моделей для нестаціонарного випадкового процесу копання дозволяє підвищити достовірність при розрахунку продуктивності копання в 1,3...2,4 рази (коефіцієнт кореляції $K_R = 0,86$).

1. Домбровский Н. Г. Землеройные машины / Н. Г. Домбровский, С. А. Панкратов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 365 с.

2. Беляков Ю. И. Выемочно-погрузочные машины на карьерах / Ю. И. Беляков. – М.: Недра, 1987. – 268 с.

3. Томаков П. И. Структуры комплексной механизации карьеров с техникой цикличного действия / Томаков П. И. – М.: Недра, 1976. – 235 с.

4. Юматов Б. П. Открытая разработка сложноструктурных месторождений цветных металлов / Б. П. Юматов, Б. Н. Байков, В. П. Смирнов. – М.: Недра, 1973. – 155 с.
5. Туренко О. М. Розрахункові роботи з курсу «Технологія відкритих гірничих робіт» / Туренко О. М.. – К.: КПІ, 1975. – 195 с.
6. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / Выговский М. Я. – М.: Наука, 1964. – 870 с.
7. Крючков А. И. Математическая модель процесса шарошечного бурения скважин на блоке / А.И. Крючков, Н. И. Жукова, Л.И. Евтеева // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: Зб. наук. праць. – 2006. – Вип. 14. – С. 59–65.
8. Крючков А. I. Детерміновані математичні моделі та їх зв'язок при моделюванні геотехнологічних процесів / Крючков А. I. // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: Зб. наук. праць. – 2007. – Вип. 15. – С. 59–65.