УДК 621.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРНОЙ ГРУППЫ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА В ПРОГРАММЕ MATHCAD

И. Н. Мацюк, Э. М. Шляхов, кандидаты технических наук (Национальный горный университет)

Розглянуто метод розв’язання задач кінематики плоских структурних груп четвертого класу у середовищі Mathcad.

Ключові слова: плоский механізм, структурна група, високий клас, кінематика, Mathcad.

Рассмотрен метод решения задач кинематики плоских структурных групп четвертого класса в среде Mathcad.

Ключевые слова: плоский механизм, структурная группа, высокий класс, кинематика, Mathcad.

The method of solving kinematics problems of the fourth class structural planar groups in Mathcad environment is investigated.

Key words: planar механизм, structural group, the fourth class, kinematics, Mathcad

Введение. Развитие машиностроения как базовой отрасли технически развитой страны невозможно без создания новых более сложных и более совершенных механизмов и машин. Горные машины не являются исключением. Одним из путей совершенствования горных машин является применение в них механизмов, имеющих улучшенные кинематические и динамические параметры.

Широкое использование в горном оборудовании получили плоские рычажные механизмы, структурно относящиеся ко второму классу. Механизмы классов выше второго, отличающиеся более сложными законами движения рабочих органов, применяются не столь широко. В [1] приведен пример применения механизма третьего класса в конструкции грохота. В последние годы наблюдается тенденция активного изучения и применения в горном оборудовании механизмов третьего и четвертого классов. Так, в [2] имеются ссылки на патенты Российской Федерации на конструкции механизированной крепи (пат. № 2303699) и двущековой дробилки (пат. № 2332260), в которых применены механизмы высоких классов.

Успешному анализу и синтезу подобных механизмов длительное время препятствовало отсутствие соответствующих методов. Так, например, в [2] описан графоаналитический метод кинематического и динамического анализа плоской шестизвенной группы Ассура с четырехугольным подвижным замкнутым изменяемым контуром.

Однако в настоящее время доминирующее положение занимают аналитические методы исследования механизмов, базирующиеся на математических компьютерных программах (Maple, Mathcad, Mathematica, Mathlab и др.).

Широкое применение для решения задач механики и теории механизмов получил программный пакет Mathcad компании Mathsoft. Иллюстрацией этому могут служить работы [3–5].

В работе [5] описано применение пакета Mathcad для выполнения кинематического и динамического анализа плоских рычажных механизмов второго класса, причем в указанных работах инструментом исследования принимается аппарат векторной алгебры, позволяющий сохранить алгоритм графического метода исследования и присущую последнему наглядность. Такой подход оправдан, например, в учебном процессе при изучении учащимися курса теории механизмов и машин. Но для исследования кинематики механизмов Mathcad целесообразнее использовать как инструмент решения векторных уравнений, которые не имеют графического решения на плоскости. Это дает возможность сократить объем вычислений и получить относительно компактную программу. Такой подход к механизмам второго класса освещен в [4].

Изложение основных материалов исследования. В настоящей статье излагается развитие приема, изложенного в [4, 5], применительно к механизмам более сложной структуры, которые принято относить к классам выше второго.

Покажем идею этого приема на примере решения задачи определения скоростей и ускорений для шестизвенной трехповодковой структурной группы четвертого класса (рис. 1). В группу входят два базисных звена *2* и *5*, которые со звеньями *3* и *4* образуют замкнутый четырехугольный изменяемый контур. Внешние кинематические пары группы *A*, *B* и *C* образованы поводками со звеньями *1*, *8* и *9*.

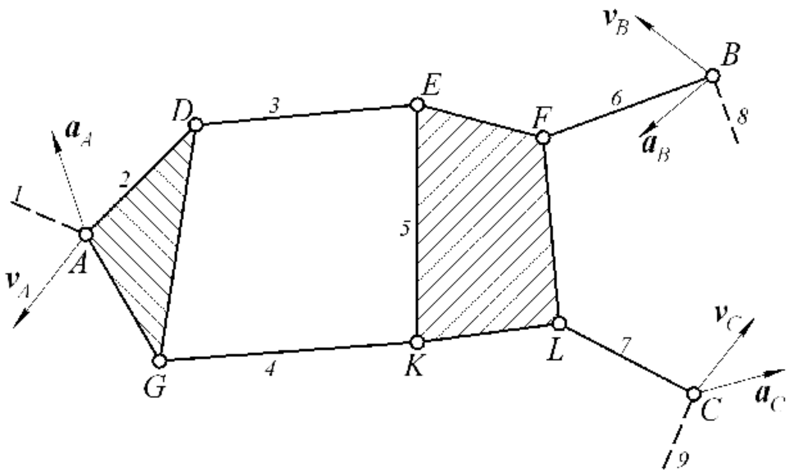

Рис. 1. Схема шестизвенной структурной группы 4-го класса

Задача формулируется следующим образом: при заданном плане группы и при заданных векторах скоростей и ускорений точек *A*, *B* и *C* определить аналогичные векторы точек *D*, *E*, *G*, *K*, *F* и *L*.

На основе метода В. А. Зиновьева можно дать векторную интерпретацию звеньям группы (рис. 2).

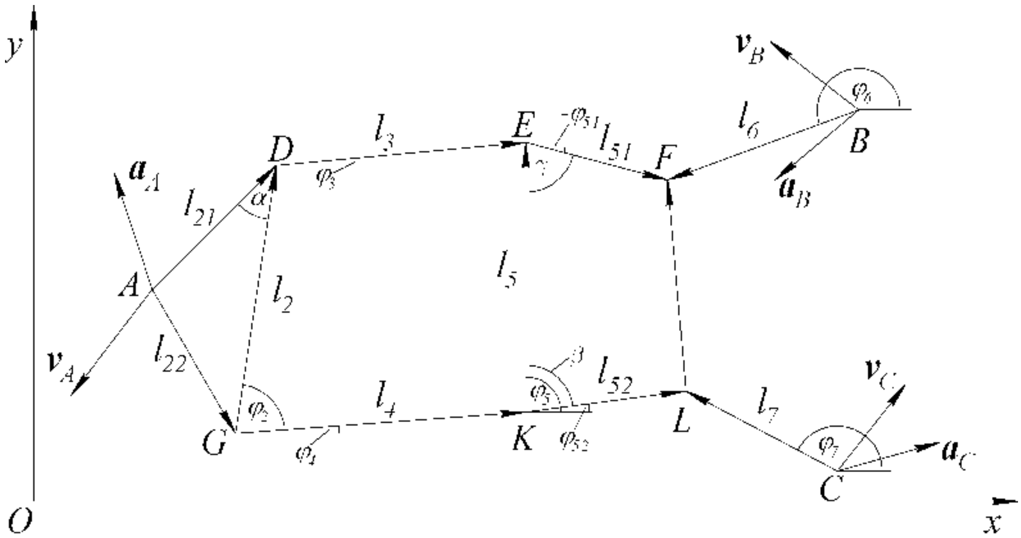

Рис. 2. Векторное представление звеньев группы 4-го класса

Итак, пусть заданы геометрические размеры звеньев: l_2, l_{21}, l_3, l_4, l_5, l_{51}, l_{52}, l_6, l_7 и углы α, β и γ.

Предположим, что в некоторой системе координат заданы координаты точек *A*, *B* и *C* и векторы, изображающие звенья группы. Положения звеньев определятся в результате геометрического анализа группы.

Для рассматриваемой группы необходимо составить три векторных уравнения замкнутости, из которых определятся шесть углов $\varphi_2, \varphi_{3,} ... \varphi_7$.

В программе Mathcad эта задача может быть решена при помощи блока Given-Find. Соответствующий фрагмент документа Mathcad приведен ниже. Здесь и далее фрагменты документов Mathcad изображаются шрифтом, отличным от шрифта основного текста статьи.

$$\phi_2 := 1 \quad \phi_3 := 1 \quad \phi_4 := 1 \quad \phi_5 := 1 \quad \phi_6 := 1$$

Given

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{21} \cdot \cos(\phi_2 - \alpha) \\ l_{21} \cdot \sin(\phi_2 - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{51} \cdot \cos(\phi_5 + \gamma + \pi) \\ l_{51} \cdot \sin(\phi_5 + \gamma + \pi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_6 \cdot \cos(\phi_6) \\ l_6 \cdot \sin(\phi_6) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{21} \cdot \cos(\phi_2 - \alpha) \\ l_{21} \cdot \sin(\phi_2 - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_4 \cdot \cos(\phi_4) \\ l_4 \cdot \sin(\phi_4) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{52} \cdot \cos(\phi_5 - \beta) \\ l_{52} \cdot \sin(\phi_5 - \beta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_7 \cdot \cos(\phi_7) \\ l_7 \cdot \sin(\phi_7) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\phi_2) \\ l_2 \cdot \sin(\phi_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_3 \cdot \cos(\phi_3) \\ l_3 \cdot \sin(\phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_4 \cdot \cos(\phi_4) \\ l_4 \cdot \sin(\phi_4) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_5 \cdot \cos(\phi_5) \\ l_5 \cdot \sin(\phi_5) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\begin{pmatrix} \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 \end{pmatrix}$$

В общем случае решений (вариантов сборки группы) может быть несколько. В [6] показано, что, например, для четырехзвенной группы третьего класса максимальное число сборок может быть равно шести. Вопрос нахождения конкретной сборки данной группы требует специального изучения и в данной статье не рассматривается.

После определения положений звеньев находят их угловые скорости и ускорения. Число необходимых векторных уравнений в каждом случае также будет равно трем, поскольку векторы указанных параметров являются свободными и определяются одной скалярной величиной, а каждое векторное уравнение равносильно двум скалярным.

Запишем векторные уравнения для определения угловых скоростей для тех же замкнутых контуров, для которых были записаны уравнения для нахождения углов.

$$\boldsymbol{v}_A + \omega_2 \times \boldsymbol{l}_{21} + \omega_3 \times \boldsymbol{l}_3 + \omega_5 \times \boldsymbol{l}_{51} = v_B + \omega_6 \times \boldsymbol{l}_6$$

$$\boldsymbol{v}_A + \omega_2 \times \boldsymbol{l}_{22} + \omega_4 \times \boldsymbol{l}_4 + \omega_5 \times \boldsymbol{l}_{52} = \boldsymbol{v}_C + \omega_7 \times \boldsymbol{l}_7$$

$$\omega_2 \times \boldsymbol{l}_2 + \omega_3 \times \boldsymbol{l}_3 = \omega_4 \times \boldsymbol{l}_4 + \omega_5 \times \boldsymbol{l}_5 .$$

Решение этой системы уравнений также получают с помощью решающего блока Given-Find. Соответствующий фрагмент документа Mathcad выглядит следующим образом.

$$\omega_2 := (0\ 0\ 1)^T \quad \omega_3 := (0\ 0\ 1)^T \quad \omega_4 := (0\ 0\ 1)^T \quad \omega_5 := (0\ 0\ 1)^T$$

$$\omega_6 := (0\ 0\ 1)^T \quad \omega_7 := (0\ 0\ 1)^T$$

Given

$$v_A + \ {}_2 \times \ {}_{21} + \ {}_3 \times \ {}_3 + \ {}_5 \times \ {}_{51} = \ {}_B \quad {}_6 \times \ {}_6$$

$$v_A + \ {}_2 \times \ {}_{22} + \ {}_4 \times \ {}_4 + \ {}_5 \times \ {}_{52} = \ {}_C \quad {}_7 \times \ {}_7$$

$$\omega_2 \times l_2 + \omega_3 \times l_3 = \omega_4 \times l_4 + \omega_5 \times l_5$$

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\begin{pmatrix} \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 \end{pmatrix}$$

Затем находят линейные скорости точек звеньев (относительные и абсолютные):

$$v_{DA} := \ {}_2 \times \ {}_{21} \qquad {}_{ED} = \ {}_3 \times \ {}_3 \qquad {}_{FE} = \ {}_5 \times \ {}_{51} \qquad {}_{KG} = \ {}_4 \times \ {}_4$$

$$v_{KG} := \ {}_4 \times \ {}_4 \qquad {}_{LK} = \ {}_5 \times \ {}_{52} \qquad {}_{DG} = \ {}_2 \times \ {}_2 \qquad = \quad \times$$

$$v_D := v_A + v_{DA} \qquad v_E := v_D + v_{ED} \qquad v_F := v_E + v_{FE}$$

$$v_G := v_A + v_{GA} \qquad v_K := v_G + v_{KG} \qquad v_L := v_K + v_{LK}$$

Задача определения ускорений также может быть решена при помощи трех векторных уравнений, для чего предварительно находят нормальные составляющие относительных ускорений.

Так как Mathcad не позволяет использовать верхний индекс параметра, запись каждой из нормальных составляющих будет выглядеть так:

$$a_{DAn} := \omega_2 \times v_{DA} \quad a_{EDn} := \omega_3 \times v_{ED} \quad a_{FEn} := \omega_5 \times v_{FE} \quad a_{GAn} := \omega_2 \times v_{GA}$$
$$a_{KGn} := \omega_4 \times v_{KG} \quad a_{LKn} := \omega_5 \times v_{LK} \quad a_{DGn} := \omega_2 \times v_{DG} \quad a_{EKn} := \omega_5 \times v_{EK}$$

Приводим фрагмент документа Mathcad с результатами решения системы трех векторных уравнений относительно неизвестных угловых ускорений звеньев:

$$\varepsilon_2 := (0\,0\,1)^T \quad \varepsilon_3 := (0\,0\,1)^T \quad \varepsilon_4 := (0\,0\,1)^T \quad \varepsilon_5 := (0\,0\,1)^T$$
$$\varepsilon_6 := (0\,0\,1)^T \quad \varepsilon_7 := (0\,0\,1)^T$$

Given

$$a_A + a_{DAn} + \varepsilon_2 \times l_{21} + a_{EDn} + \varepsilon_3 \times l_3 + a_{FEn} + \varepsilon_5 \times l_{51} = a_B + a_{FBn} + \varepsilon_6 \times l_6$$
$$a_A + a_{GAn} + \varepsilon_2 \times l_{22} + a_{KGn} + \varepsilon_4 \times l_4 + a_{LKn} + \varepsilon_5 \times l_{52} = a_C + a_{LCn} + \varepsilon_7 \times l_7$$
$$a_{KGn} + \varepsilon_4 \times l_4 + a_{EKn} + \varepsilon_5 \times l_5 = a_{DGn} + \varepsilon_2 \times l_2 + a_{EDn} + \varepsilon_3 \times l_3$$
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_7 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_7 \end{pmatrix}$$

Тангенциальные составляющие относительных ускорений:

$$a_{DA\tau} := \varepsilon_2 \times l_{21} \quad a_{ED\tau} := \varepsilon_3 \times l_3 \quad a_{FE\tau} := \varepsilon_5 \times l_{51} \quad a_{FB\tau} := \varepsilon_6 \times l_6$$
$$a_{GA\tau} := \varepsilon_2 \times l_{22} \quad a_{KG\tau} := \varepsilon_4 \times l_4 \quad a_{LK\tau} := \varepsilon_5 \times l_{52} \quad a_{LC\tau} := \varepsilon_7 \times l_7$$
$$a_{DG\tau} := \varepsilon_2 \times l_2 \quad a_{EK\tau} := \varepsilon_5 \times l_5$$

Теперь несложно получить значения абсолютных линейных ускорений точек:

$$a_D := a_A + a_{DAn} + a_{DA\tau} \quad a_E := a_D + a_{EDn} + a_{ED\tau} \quad a_F := a_B + a_{FBn} + a$$
$$a_G := a_A + a_{GAn} + a_{GA\tau} \quad a_K := a_G + a_{KGn} + a_{KG\tau} \quad a_L := a_C + a_{LCn} + a_{LC\tau}.$$

Выводы. Таким образом, пакет Mathcad позволяет относительно просто исследовать кинематику плоских рычажных механизмов, в составе которых шестизвенные Ассуровы группы четвертого класса. Более того, очевиден вывод о том, что описанный прием может быть использован при исследовании плоских кинематических цепей любой структуры с четным числом звеньев, для которых можно записать независимые уравнения замкнутости в количестве равном половине числа звеньев. При этом максимальное число звеньев будет ограничиваться только возможностями математического процессора компьютерной программы.

Изложенный подход может быть также использован при кинематическом синтезе подобных механизмов.

1. *Осецкий В. М.* Техническая механика (Механика общая и механика машин): Учеб. пособие для вузов / В. М. Осецкий. – М.: Госгортехиздат, 1962. – 471 с.: ил.
2. *Дворников Л. Т.* Кинематика и кинетостатика плоской шестизвенной группы Асура четвертого класса / Л. Т. Дворников, С. П. Стариков. – Теория механизмов и машин. – СПб. – 2006. – № 1(7). – Т. 4. – С. 61–65.
3. *Бертяев В. Д.* Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.
4. *Третьяков В. М.* Использование программы Mathcad при определении скоростей и ускорений рычажных механизмов / В. М. Третьяков // Теория механизмов и машин. – 2009. – № 2. – С. 40–48.
5. *Мацюк І. М.* Дослідження кінематики та динаміки механізмів засобами векторної алгебри // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. Серія “Гірництво”: Зб. наук. праць. – 2009. – Вип. 18. – С. 79–84.
6. *Пейсах Э. Е.* Определение положений звеньев трехповодковой и двухповодковой четырехзвенных групп Асура с вращательными парами. – Машиноведение. – 1985. – № 5. – С. 55–61.

Надійшла до редакції 2.11.2011 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. І. А. Лучком