УДК 622.231

РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА–ЯКОБІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДЕТЕРМІНОВАНОГО РУХУ

А.І. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ "КПІ", ІЕЕ)

Приведен вывод уравнения Гамильтона-Якоби с помощью упрощенного метода, который базируется на релятивистской механике и позволяет эффективно моделировать детерминированные процессы, в том числе и процессы горного производства.

Математичне моделювання виробничих процесів, у тому числі й процесів гірничого виробництва, в кінцевому підсумку можна звести до математичного опису руху маси в просторі зі зміною імпульсно-енергетичних параметрів рухомого тіла та параметрів навколишнього простору. Відомо, що рівняння руху частинки або системи взаємозв'язаних частинок у просторі можна записати математично в різних формах. Це може бути рівняння Ньютона, рівняння Лагранжа в узагальнених координатах, рівняння Ейлера або канонічні рівняння Гамільтона. Всі вони, хоч і різні за формою, з математичної точки зору є системами звичайних диференціальних рівнянь другого і першого порядку. Їх розв'язання можна звести до пошуку залежностей координат та імпульсів частинок від часу.

Однак в аналітичній механіці [1, 2] доводиться, що розв'язання цих систем рівнянь можна звести до розв'язання єдиного диференціального рівняння першого порядку у частинних похідних, яке називається рівнянням Гамільтона–Якобі. З його допомогою розв'язуються будь-які задачі, пов'язані з моделюванням детермінованих процесів.

Рівняння Гамільтона–Якобі мало вивчається у вузівських курсах механіки, оскільки для його виводу та аналізу використовується надто громіздкий метод канонічних перетворень. Метою даної статті є виклад виводу рівняння Гамільтона–Якобі спрощеним методом, який базується на підході релятивістської механіки і дозволяє студентам, аспірантам та науковим співробітникам ефективно моделювати детерміновані процеси, включаючи й гірниче виробництво.

У чотиривимірному просторі Мінковського (M^{3+1}) елементарний просторово-часовий інтервал можна записати у вигляді

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}, \tag{1}$$

де $\mathbf{r}$ – просторовий радіус-вектор; t – час; c – швидкість світла у вакуумі.

При $d\mathbf{r}\to 0$ (власна система відліку) час ототожнюється з власним часом $dt \to dt_0$, а елементарний просторово-часовий інтервал стає інваріантом

$$c^2\,dt^2 - d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = c^2\,dt_0^2, \tag{2}$$

який зберігається при просторово-часових перетвореннях Лоренца. З останнього виразу випливає співвідношення

$$dt_0 = dt\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}},$$

де $\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}$ – множник Лоренца; $\mathbf{V}$ – швидкість руху.

Після диференціювання виразу (2) за часом t і множення його на масу спокою частинки m_0 отримаємо

$$m_0c^2dt - m_0\mathbf{V}d\mathbf{r} = m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}dt_0. \tag{3}$$

Якщо провести заміну власного часу t_0 на t (час, пов'язаний з рухом частинки зі швидкістю $\mathbf{V}$), то вираз (3) можна записати як

$$dD = \frac{-m_0c^2dt}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}} + \frac{m_0\mathbf{V}d\mathbf{r}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}dt, \tag{4}$$

тобто у вигляді елементарної дії при русі частинки по одній з можливих дійсних траєкторій. Після диференціювання виразу (4) за часом, виходячи з визначення дії по Гамільтону $D=\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt$, дістанемо

$$\frac{dD}{dt}=\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial D}{\partial r}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

або

$$\frac{\partial D}{\partial t}=L-m\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\,, \tag{5}$$

де $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}}$ – маса частинки, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{V}$;

$L=-m_0c^2\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}$ – функція Лагранжа.

В аналітичній механіці доводиться, а вираз (5) це підтверджує, що $L-m\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}=-H$, тобто дорівнює функції Гамільтона, яка складається з кінетичної T і потенціальної U енергій частинки. Тоді вираз (5) в загальному вигляді можна записати через функцію Гамільтона:

$$\frac{\partial D}{\partial t}=-H\,(x,y,z,p_x,p_y,p_z,t)\,. \tag{6}$$

Оскільки імпульси можна виразити через похідні від дії по координатах

$$p_x=\frac{\partial D}{\partial x},\ p_y=\frac{\partial D}{\partial y},\ p_z=\frac{\partial D}{\partial z},$$

то отримаємо рівняння Гамільтона–Якобі в його класичному запису:

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right)^2\right]+U(x,y,z,t)=0\,. \tag{7}$$

Під час виведення цього рівняння використовувалось поняття "елементарна частинка", однак ніде не конкретизувався тип частинки або її конкретна маса, а це означає, що під значенням m слід розуміти як масу окремої частинки, так і сумарну масу будь-якої сукупності частинок різних типів. Тому отриману формулу однаковою мірою можна застосувати до будь-якого тіла, до того ж під *m* треба розуміти повну масу тіла, а під V – швидкість його руху, як цілого.

Як приклад, розглянемо рух тіла масою m в полі з потенціалом $U(x,y,z,t)$. Виходячи з закону збереження енергії, можна прирівняти гамільтоніан до постійної енергії *E*, оскільки вона буде інваріантом: $H(x,y,z,t) = E$. Розписавши значення гамільтоніана

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + U(x,y,z,t) = E \tag{8}$$

і зробивши формальну заміну $\dfrac{\partial D}{\partial x_i} = p_i$ та $\dfrac{\partial D}{\partial t} = E$, отримаємо рівняння Гамільтона–Якобі (7), або в короткому запису

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2m}(gradD)^2 + U = 0. \tag{9}$$

Знайшовши розв'язок цього рівняння щодо скалярної функції $D(x,y,z,p_x,p_y,p_z,t)$, далі обчислюємо значення координат та імпульсів. Докладнішу теорію рівнянь Гамільтона–Якобі та методи їх розв'язання наведено в працях [1, 3].

1. *Голдстейн Г.* Классическая механика. – 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 328 с.

2. *Yan C.C.* // Amer. J. Phys. – 1984. – V. 52, № 6. – P. 555.

3. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 256 с.