процесу на цій стадії можна прийняти практично постійною, оскільки її зміни незначні порівняно з тривалістю процесу осідання. Тривалість першої стадії порівняно з другою незначна. Роль кожної стадії просадочних деформацій, як і в класичній теорії повзучості, залежить від навантаження, вологості, типу і властивостей просадочного грунту.

Експериментальні криві осідання в широкому діапазоні часу при всіх досліджених значеннях вологості виявилися подібними. Тому всі криві сім'ї $E_{Sl} \approx f(t)$ можна отримати з однієї кривої цієї сім'ї множенням її ординати на деяку величину, що є функцією ущільнювального навантаження. На основі проведених досліджень можна зробити такі висновки:

явища осідання, пов'язані з фізико-хімічними процесами, які викликають розвиток деформацій у часі при постійних напруженні та вологості просадочного грунту, можуть бути класифіковані як реологічні нерівноважні процеси і описані закономірностями теорії спадковості та реології;

спільне використання теорії спадковості та реології, які враховують в явній формі часову складову зміни напружень і деформацій, викликає значні труднощі при визначенні функції спадковості, яка входить у формули опису залежності між деформацією, напруженням і часом при постійній вологості;

просадочні властивості справляють значний вплив не тільки на сталі, що входять у функцію спадковості, але й на вигляд самої функції, яку можна одержати експериментальним шляхом. Цей шлях відкриває великі можливості для отримання форми функції, що описує нерівномірні процеси просадочних деформацій зволожуваних лесових грунтів із застосуванням основних положень спадкової теорії повзучості.

1. *Вялов С.С.* Реологические основы механики грунтов. – М.: Недра, 1978. – 196 с.

2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 180 с.

3. *Самедов А.М.* Перлитокерамические изделия. – М.: Стройиздат, 1985. – 150 с.

4. *Шукле Л.* Реологические проблемы механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1976. – 486 с.

УДК 622.231

НАУКОВІ ПРИНЦИПИ І МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ГІРНИЧОГО ВИРОБНИЦТВА

А.І. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ "КПІ", ІЕЕ)

Рассматривается связь математических моделей процессов горного производства с основными научными принципами. Предложен метод моделирования случайных нестационарных процессов в виде совокупности

уравнений Гамильтона-Якоби и уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с использованием принципа дуальности движения массы в пространстве.

Однією з причин низької конкурентоспроможності продукції українських гірничих підприємств є висока енергоємність виробничих процесів, зумовлена їх низьким ККД. Але дійсна причина такого стану полягає в недостатньому науковому розробленні основних виробничих процесів.

Проблема полягає в тому, що такі процеси, як руйнування гірських порід, є випадковими нестаціонарними процесами, які важко піддаються вимірюванню, аналізу, прогнозу і керуванню. Для дослідження складних динамічних об'єктів в наш час широко застосовуються методи математичного моделювання, основою яких є універсальні наукові принципи.

Будь-яка математична модель буде тим точніше відображати дійсність, чим універсальніші принципи, на яких вона базується. Вся історія розвитку світової науки пронизана ідеєю пошуку таких принципів.

1 Детерміновані математичні моделі динамічних процесів

Ідея про те, що явища, які ми спостерігаємо в природі, мають деякі екстремальні властивості, виникла, мабуть, ще у філософів древньої Еллади. Перше втілення цієї ідеї у вигляді фізичного принципу належить французькому математику П'єру Ферма. В 1629 р. він встановив, що світло, поширюючись від однієї точки до іншої, "вибирає" такий шлях, щоб час проходження відстані виявився мінімальним.

У 1696 р. у лейпцігському журналі "Acta Eruditorum" Йоган Бернуллі надрукував задачу по визначенню шляху, по якому під впливом власної ваги спускається тіло, яке, почавши рух у верхній точці, дійде до нижньої за найкоротший час. Ця знаменита "задача про брахістрохрону" (циклоїду) практично була аналогом принципу Ферма в механіці.

Зазначені роботи послужили поштовхом для пошуків більш загального екстремального принципу руху. Уперше цей принцип був, мабуть, сформульований в листах Лейбніца. Виявилося, що деяка характеристика, яку він назвав "action" (дія), при русі тіла залишається весь час екстремальною: "Вона (дія) являє собою добуток маси, шляху і швидкості або часу і живої сили (кінетичної енергії). Я помітив, що в змінах руху вона постійно стає або максимумом, або мінімумом" [1]. Однак широкої популярності це формулювання не отримало, оскільки Лейбніц до цього питання не повертався.

Як би там не було, але вважається, що автором, як його назвали надалі, "principe de la moindre action" (принципу найменшої дії) був президент Берлінської Академії П'єр Мопертюї. Ще в 1740 р. він опублікував працю, в якій показав, що система матеріальних точок знаходиться у рівновазі тоді, коли сума деяких добутків екстремальна, а в 1746 р. сформулював універсальний принцип найменшої дії: "Якщо в природі відбувається якась зміна, то необхідна для цієї зміни міра дії є мінімальною" [1].

Математичне обґрунтування і більш глибокий зміст у цей принцип вніс Ейлер. У 1834 р. Гамільтон довів, що для консервативних систем можна не вимагати виконання закону збереження енергії на всіх допустимих траєкторіях, якщо взяти дію у вигляді

$$D = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt, \tag{1}$$

де T – кінетична енергія; U – потенціальна енергія системи.

Для загального випадку руху аналогічне доведення було зроблено в 1848 р. М.В. Остроградським, тому твердження про стаціонарність функціонала (1) для дійсної траєкторії руху називають принципом Гамільтона–Остроградського [2]. Прирівнюючи першу варіацію функціонала (1) до нуля, знаходять класичні рівняння Лагранжа.

Усякий рух є результатом взаємодії частинок за допомогою чотирьох типів фундаментальних сил – гравітаційних, електромагнітних, слабких і сильних. При описі процесів гірничого виробництва враховуються, в основному, гравітаційні та електромагнітні взаємодії, які описуються одним з таких класичних рівнянь:

Ньютона (1687 р.)

$$\frac{d(m\vartheta_i)}{dt} = F_i\ ; \tag{2}$$

Ейлера (1758 р.)

$$\frac{d}{dt}(I\omega_i) = M_i\ ; \tag{3}$$

Лагранжа (1788 р.)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \tag{4}$$

канонічними рівняннями Гамільтона (1835 р.)

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i\ ; \tag{5}$$

Гамільтона-Якобі (1842 р.)

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -H\ ; \tag{6}$$

Ейнштейна в спеціальній теорії відносності (1905 р.)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vartheta_i}{\sqrt{1 - \vartheta_i^2 / C^2}}\right) = K_i; \tag{7}$$

Ейнштейна в загальній теорії відносності (1913 р.)

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{m}F_\alpha. \qquad (8)$$

Наведені рівняння, незважаючи на різну форму запису і фізичну суть, що виражається ними, знаходяться в тісному зв'язку і можуть бути отримані з принципу найменшої дії, як і рівняння Лагранжа.

Будь-який процес гірничого виробництва розглядається, врешті-решт, як рух маси в просторі. Під масою розуміємо матеріальні об'єкти, починаючи з елементарної частинки і закінчуючи макротілами. Аналітичний опис такого руху, або, як зараз кажуть, математичне моделювання процесу традиційно здійснюється за допомогою диференціальних рівнянь, наведених раніше. Та подальші дослідження переміщення тіл у просторі довели, що модель детермінованого руху є лише першим наближенням до дійсного характеру руху, який називають випадковим або ймовірнісним. Досвід показує, що грунтуючись на зазначених класичних рівняннях, неможливо одержати адекватний опис нестаціонарного ймовірнісного руху маси в просторі.

2 Імовірнісні математичні моделі випадкових стаціонарних та нестаціонарних процесів

На відміну від детермінованого, випадковий рух маси в просторі не можна описати рівнянням якої-небудь конкретної траєкторії в просторі, як функції часу. Для характеристики випадкового руху необхідно визначити щільність імовірності координат можливих траєкторій $\omega(\bar{r},t)$, математичне очікування координат найімовірнішої траєкторії $\bar{r}(t)$, відхилення можливих траєкторій від найімовірнішої траєкторії σ_r.

Для знаходження зазначених параметрів випадкових, але стаціонарних процесів руху маси розроблено принцип максимальної ентропії [5], відповідно до якого найімовірніші значення координат траєкторії руху відповідають максимуму ентропії:

$$H(r_i) = -\int_{-\infty}^{\infty}\omega(r_i)\ln\omega(r_i)dr_i \to \max \qquad (9)$$

з відповідним набором граничних умов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(r_i)dr_i = 1; \qquad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}r_i^2\omega(r_i)dr_i = \sigma^2. \qquad (11)$$

Для знаходження відповідного математичного виразу щільності ймовірності застосовується метод невизначених множників Лагранжа. Та навіть принцип максимальної ентропії є недостатнім у випадку, коли граничні умови не задані або модельований процес нестаціонарний. Досвід показує, що неможливо описати нестаціонарний випадковий рух маси в просторі, спираючись на принципи найменшої дії або максимальної ентропії.

Таку можливість надає принцип дуальності руху маси в просторі. Щоб одержати опис такого нестаціонарного випадкового руху, розглянемо просторово-часовий інтервал у просторі Мінковського M^{3+1} у вигляді

$$\psi\psi^* ds^2 = \psi\psi^* c^2 dt^2 - \psi\psi^* d\bar{r} d\bar{r}, \tag{12}$$

де s – просторово-часовий інтервал; c – швидкість світла; t – час; $\bar{r}$ – просторовий радіус-вектор; $\psi(\bar{r},t)$ – хвильова функція (Луї де Бройль, [3]) або амплітуда ймовірності (Фейнман, [4]) – комплексна функція, яка залежить тільки від координат і часу.

Якщо через спряжену комплексну функцію ψ^* ввести нормовану щільність імовірності

$$\omega(\bar{r},t) = \frac{\psi\psi^*}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^* dV^{(4)}}, \tag{13}$$

помножити вираз (12) на масу спокою m_0 і скоротити на dt_0, то отримаємо

$$\int\limits_{V^{(4)}} \omega \int\limits_t m_0 c^2 \sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}\, dt dV^{(4)} = \int\limits_{V^{(4)}} \omega \left[\int\limits_t mc^2 dt - \int\limits_r m\bar{\vartheta} d\bar{r} \right] dV^{(4)}, \tag{14}$$

де $dV^{(4)} = cdtdV$ – чотиривимірний об'єм у просторі M^{3+1}.

Можна показати, що ліва частина виразу (14), яка описує повну дію, є інваріантом при перетворенні координат

$$\int\limits_{V^{(4)}} \omega \int\limits_t m_0 c^2 \sqrt{1 - \vartheta^2 / c^2}\, dt dV^{(4)} = inv.$$

Вираз $\int\limits_{V^{(4)}} \omega \int mc^2 dt$ являє собою внутрішню дію, а вираз $\int\limits_{V^{(4)}} \omega \int\limits_r m\bar{\vartheta} d\bar{r}$ – зовнішню дію, що пов'язана з рухом маси в просторі. У зв'язку з цим принцип дуальності руху маси в просторі можна сформулювати так:

всяка зміна зовнішньої дії при русі маси в просторі зумовлена еквівалентною зміною внутрішньої дії її частинок зі збереженням повної дії незмінною. Внутрішня дія залежить від зміни форми та розміру частинок рухомої маси, а зовнішня – від зміни параметрів траєкторії руху тіла, як сукупності взаємопов'язаних частинок, у просторі.

Враховуючи те, що вираз $m_0c^2\sqrt{1-\vartheta^2/c^2}=L$ є функцією Лагранжа [5], а вираз $\int\limits_t mc^2dt-\int\limits_r m\vec{\vartheta}d\vec{r}=D$ описує сумарну дію, залежність (14) можна записати у вигляді

$$-\int\limits_{V^{(4)}}\omega\int\limits_t LdtdV^{(4)}=\int\limits_{V^{(4)}}\omega DdV^{(4)}. \qquad (15)$$

Здиференцюємо праву та ліву частини виразу (15) окремо, зрівняємо їх, і після спрощення запишемо основне рівняння у вигляді (інтеграли випущені)

$$\omega\left[\frac{\partial D}{\partial t}+\vec{p}\dot{\vec{r}}-L\right]+D\frac{\partial\omega}{\partial t}-\frac{D^2}{2m}\frac{\partial^2\omega}{\partial\vec{r}\partial\vec{r}}-\dot{\vec{r}}\int\limits_t Ldt\frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}}-U\omega=0. \qquad (16)$$

З урахуванням того, що функція Гамільтона H пов'язана з функцією Лагранжа L класичною залежністю $H=\vec{p}\dot{\vec{r}}-L$ [5], останній вираз розпадається на два рівняння:

$$\frac{\partial D(\vec{r},\vec{p},t)}{\partial t}=-H(\vec{r},\vec{p},t); \qquad (17)$$

$$D\frac{\partial\omega(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{D^2}{2m}\frac{\partial^2\omega(\vec{r},t)}{\partial r\partial r}+D\dot{\vec{r}}\frac{\partial\omega(\vec{r},t)}{\partial r}+U\omega. \qquad (18)$$

Рівняння (17) являє собою рівняння Гамільтона-Якобі, яке описує набір можливих траєкторій руху маси в просторі і може бути записане у вигляді [6]

$$\frac{\partial D}{dt}=-\frac{(\nabla D)^2}{2m}-U. \qquad (19)$$

Рівняння (18) описує зміну щільності ймовірності координат траєкторії руху маси m у часі і просторі. Це диференціальне рівняння в частинних похідних належить до параболічного типу і може бути записане в такому вигляді:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{D}{2m}\nabla^2\omega+\frac{\nabla D}{m}\nabla\omega+\frac{U}{D}\omega. \qquad (20)$$

Повне математичне доведення та аналіз рівнянь подібного типу вперше виконані в 1931 році А.Н. Колмогоровим. Для деяких випадків при дифузійних процесах рівняння такого типу отримані раніше Фоккером та Планком. Тому воно має назву рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК).

Висновки

Традиційні детерміновані математичні моделі реальних виробничих процесів, що базуються на принципі найменшої дії, у вигляді рівнянь типу Лагранжа або еквівалентних їм є тільки першим наближенням до опису дійсного руху маси в просторі.

Стаціонарні випадкові процеси моделюються з використанням принципу максимальної ентропії методом невизначених множників Лагранжа.

Нестаціонарні випадкові процеси моделюються з використанням принципу дуальності руху маси в просторі у вигляді сукупності диференціальних рівнянь Гамільтона–Якобі та ФПК, розв'язання яких дозволяє одержати всі необхідні параметри такого процесу.

1. *Тиле Р.* Леонард Эйлер. – Киев: Выща школа, 1983. – 192 с.

2. *Основы вариационных методов* оптимизации производственных процессов / Под ред. М.В. Бунина. – Харьков: Выща школа, 1982. – 144 с.

3. *Шпольский З.В.* Атомная физика: Учеб. пособие. Введение в атомную физику. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 552 с.

4. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. - М .: Мир, 1968. – 382 с.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. Теория поля. - 7-е изд. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 512 с.

6. *Крючков А.І.* Рівняння Гамільтона-Якобі при моделюванні детермінованого руху // "Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія "Гірництво": Зб. наук. праць. – Київ: НТУУ "КПІ" : ЗАТ "Техновибух". – 1999. – Вип. 1. С. 48–51.

УДК 624.138

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ КОНСОЛИДАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОФАЗНОГО МАССИВА ИЗ ИЛИСТО-КАРБОНАТНО-СЛАНЦЕВЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

Б. Кавалец, докт.-инж. (Силезский технический университет, РП)

Розглядається математичне моделювання консолідації і повзучості багатофазного масиву мулисто-карбонатно-сланцевих гірських порід при відомих коефіцієнтах стисливості порової води, миттєво-відносної стисливості породи до і після консолідації стабілізованого ущільнення, коефіцієнті фільтрації масиву та дослідних параметрах повзучості.

В практике строительства многие сооружения, такие как плотины, дамбы, насыпи автомобильных и железных дорог, представляющие собой массивы из многофазных илисто-карбонатно-сланцевых пород, подвергаются консолидации и ползучести под действием собственного веса. Решение таких плоских напряженно-деформированных задач необходимо начинать с определения