

Стационарні випадкові процеси моделюються з використанням принципу максимальної ентропії методом невизначених множників Лагранжа.

Нестационарні випадкові процеси моделюються з використанням принципу дуальності руху маси в просторі у вигляді сукупності диференціальних рівнянь Гамільтона–Якобі та ФПК, розв'язання яких дозволяє одержати всі необхідні параметри такого процесу.

1. *Тиле Р.* Леонард Эйлер. – Киев: Выща школа, 1983. – 192 с.
2. *Основы вариационных методов* оптимизации производственных процессов / Под ред. М.В. Бунина. – Харьков: Выща школа, 1982. – 144 с.
3. *Шпольский З.В.* Атомная физика: Учеб. пособие. Введение в атомную физику. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1984. – Т.1. – 552 с.
4. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир, 1968. – 382 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. Теория поля. – 7-е изд. – М.: Наука, 1988. – Т. 2. – 512 с.
6. *Крючков А.І.* Рівняння Гамільтона–Якобі при моделюванні детермінованого руху // “Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. Серія “Гірництво”: 36. наук. праць. – Київ: НТУУ “КПІ”: ЗАТ “Техновібух”. – 1999. – Вип. 1. С. 48–51.

УДК 624.138

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ КОНСОЛИДАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ МНОГОФАЗНОГО МАССИВА ИЗ ИЛИСТО-КАРБОНАТНО-СЛАНЦЕВЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

*Б. Кавалец, докт.-инж. (Силезский технический университет, РП)*

*Розглядається математичне моделювання консолідації і повзучості багатофазного масиву муисто-карбонатно-сланцевих гірських порід при відомих коефіцієнтах стисливості порової води, миттєво-відносної стисливості породи до і після консолідації стабілізованого ущільнення, коефіцієнти фільтрації масиву та дослідних параметрах повзучості.*

В практике строительства многие сооружения, такие как плотины, дамбы, насыпи автомобильных и железных дорог, представляющие собой массивы из многофазных илисто-карбонатно-сланцевых пород, подвергаются консолидации и ползучести под действием собственного веса. Решение таких плоских напряженно-деформированных задач необходимо начинать с определения

624.138

начального и конечного напряженно-деформированного состояния массива. В случае многофазного массива коэффициент фильтрации пород мал, а размеры сооружения велики, поэтому конец периода строительства можно условно принять за начальное состояние сооружения. Начальное значение порового давления в многофазном массиве может быть определено по формуле

$$P_w(x, y, \tau) = \sigma(x, y)A_0, \quad (1)$$

где  $\sigma(x, y)$  – среднее давление, определяемое на основе решения краевой задачи;  $A_0$  – начальный коэффициент порового давления;  $\tau$  – отрезок времени.

Для определения промежуточного напряженного состояния необходимо решить плоскую задачу консолидации, т.е. решить уравнение

$$\frac{\partial P_w}{\partial t} = C_v \nabla^2 P_w, \quad (2)$$

где  $C_v = \frac{K_\phi \alpha_w \alpha_v}{3\gamma_w(\alpha_w + n\alpha_v)}$ ;  $\alpha_w$  – модуль объемного сжатия поровой воды;  $\alpha_v$  – модуль объемного сжатия породы;  $n$  – пористость;  $\gamma_w$  – удельный вес воды в порах;  $K_\phi$  – коэффициент фильтрации массива;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $P_w$  – поровое давление;  $t$  – время.

Для определения суммы главных напряжений в случае плоской деформации используем известное соотношение

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)(1 + \mu_{np}), \quad (3)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  – компоненты напряжений;  $\mu_{np}$  – приведенный коэффициент Пуассона;  $x$ ,  $y$  – горизонтальная и вертикальная оси плоскости.

При граничных  $P_w(0, t) = P_w(\infty, t) = 0$  и начальных

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_1) &= \frac{P}{3\pi} \frac{y}{R^3} (1 + \mu_{np}); \quad S(\tau_1) = \frac{P}{2\pi R} \frac{1 - \mu_{np}}{G}; \\ P_w(\tau_1) &= \sigma(\tau_1)A_0; \quad A_0 = \frac{\alpha_w}{\alpha_w + n\alpha_v} \end{aligned} \quad (4)$$

условиях решение уравнения (2) имеет следующий вид:

$$P(x, y, t) = \frac{2P}{3\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} A_0 (1 + \mu_{np}) \left[ \exp\left(-\frac{r^2}{4C_v t}\right) - 1 \right], \quad (5)$$

где  $G$  – модуль сдвига;  $\tau_1$  – отрезок времени;  $R$ ,  $r$  – наружный и внутренний радиусы полости.

Для полностью водонасыщенного массива, т.е. при  $\alpha_w \rightarrow \infty$ ,  $\mu_{np} = 0,5$ ,  $A_0 = 1$  это решение упрощается и при условии несжимаемости поровой воды принимает вид:

$$P_w(\tau_1) = \frac{2P}{3\pi} \frac{y}{R^3} = \frac{2P}{3\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (6)$$

Если рассматривать собственный вес массива как полосовую равномерно распределенную нагрузку, то состояние сооружений из илесто-карбонатно-сланцевых пород будет иметь вид полупространства. Начальное напряженное состояние такой системы определяется с помощью вышеописанного метода следующим образом:

$$P_w(\tau_1) = A_0 \frac{P}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2by}{x^2 + y^2 - b^2}. \quad (7)$$

Осадка (уплотнение) во времени  $\tau_1$  определяется по формуле

$$S(\tau_1) = \frac{P}{\pi} \frac{1 - \mu_{np}}{G} \left[ 2b - \ln \frac{|x-b|^{x-b}}{|x-b|^{x+h}} \right], \quad (8)$$

где  $b$  – полуширина полосы прямоугольной площади со сторонами  $b$  и  $l$ , испытывающей нагрузку от сооружения.

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$P_{II}(\tau_1) = A_0 (1 + \mu_{np}) \frac{P}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{n}{m \sqrt{1 + m^2 + n^2}}; \quad (9)$$

$$S(\tau_1) = \frac{bP}{\pi} \frac{1 - \mu_{np}}{G} \left[ \ln \frac{\sqrt{1+n^2} + n}{\sqrt{1+n^2} - n} + \ln \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{\sqrt{1+n^2} - 1} \right], \quad (10)$$

где  $n = l/b$ ;  $m = y/(2b)$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $P$  – интенсивность нагрузки от собственного веса массива.

Определение промежуточного напряженного состояния сводится к рассмотрению дифференциального уравнения (2) с начальными условиями (7) и (9) и граничными условиями  $P_{II}(0, t) = P_{II}(\infty, t) = 0$ , что приводит к следующим интегралам:

а) для плоской задачи:

$$P_w(x, y, t) = \frac{A_0 P}{4\pi^2 C_v t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2b}{\eta^2 + \xi^2 - b^2} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2}{4C_v t} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-\eta)^2 + (y+\xi)^2}{4C_v t} \right] \right\} d\eta d\xi; \quad (11)$$

б) для пространственной задачи:

$$P_w(x, y, z, t) = \frac{A_0(1 + \mu_{np})P}{8\pi\sqrt{\pi C_v t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{m\sqrt{1+n^2+m^2}} \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2 + (z-\nu)^2}{4C_v t} \right] - \exp \left[ -\frac{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2 + (z+\nu)^2}{4C_v t} \right] \right\} \times d\eta d\xi d\nu, \quad (12)$$

где  $\eta, \xi$  – безразмерные величины.

Приведем некоторые результаты решения плоской и пространственной задач, которые могут иметь практический интерес.

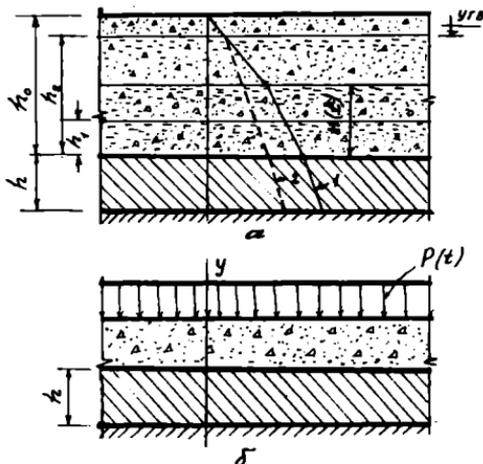
Рассмотрим решения задач, связанных с оседанием поверхности вследствие фильтрационной консолидации, с учетом ползучести скелета илито-карбонатно-сланцевых пород и сжимаемости поровой воды. В процессе фильтрации поровой воды обезвоженные слои породы из-за отсутствия взвешивающего действия воды становятся более тяжелыми и оказывают дополнительное давление на нижележащие толщи массива, создавая условия для его уплотнения (рисунок). Вследствие понижения уровня воды массив становится более тяжелым и его объемная масса возрастает на величину  $\gamma_t = \gamma - \gamma'$ , где  $\gamma$  – объемная масса породы выше уровня воды,  $\gamma'$  – объемная масса скелета породы, взвешенная в воде, т. е.  $\gamma' = (\gamma_s - \gamma_w)/(1 - n)$ ;  $\gamma_s$  – удельный вес породы,  $\gamma_w$  – удельный вес воды,  $n$  – пористость.

Тогда изменяющееся во времени уплотняющее давление на нижележащую толщу слабых водонасыщенных массивов будет определяться выражением

$$P = \gamma_T [h_2 - H(t)],$$

где  $h_2$  – первоначальный уровень воды над поверхностью уплотняемой толщи мощностью  $h$ ;  $H(t)$  – изменяющийся во времени уровень воды над поверхностью уплотняемой толщи.

Таким образом, решение задачи уплотнения многофазного массива из илито-карбонатно-сланцевых пород толщиной  $h$  в случае равномерного понижения уровня воды в вышележащей толще сводится к рассмотрению дифференциального уравнения консолидационного уплотнения:



Расчетная схема уплотнения при равномерном понижении грунтовых вод:  $a$  – изменение уровня грунтовых вод при уплотнении от собственного веса массива;  $b$  – одномерное уплотнение с изменяющимися во времени граничной нагрузкой и напором

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + nm_v \frac{\partial P_w}{\partial t} = \frac{K_\phi}{\gamma_w} \frac{\partial^2 P_w}{\partial y^2}. \quad (13)$$

Рассмотрим решение этого уравнения в общем случае, когда на границах слоя меняются внешняя нагрузка и напор.

Примем, что ползучесть скелета породы вследствие воздействия равномерно распределенной нагрузки описывается уравнением вида

$$\varepsilon_1(t) = m_{v1} \sigma_1(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} m_{v0}(t, \tau) d\tau. \quad (14)$$

Поскольку в процессе консолидационного уплотнения имеет место уравнение равновесия вида  $P(t) + P_w(t) = P_w(z, t) + \sigma(y, t)$ , то уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial^2 P_w}{\partial t^2} + A \frac{\partial P_w}{\partial t} - f(t) = C_v \left( \frac{\partial^3 P_w}{\partial y^2 \partial t} + \eta \frac{\partial^2 P_w}{\partial y^2} \right), \quad (15)$$

где

$$f(t) = A_0 \ddot{P}(t) + B \dot{P}(t) + A_0 \ddot{P}_w(t) + B \dot{P}_w(t);$$

$$A = \frac{\eta(m_{v1} + m_{v2} + nm_w)}{m_{v1} + nm_w}; \quad B = \frac{\eta(m_{v1} + m_{v2})}{m_{v1} + nm_w};$$

$$C_w = \frac{K_\phi}{\gamma_w (m_{v1} + nm_w)} ; A_0 = \frac{m_{v1}}{m_{v1} + nm_w} . \quad (15a)$$

Здесь давление воды рассматривается как нагрузка. Такое условие справедливо, если массив не полностью водонасыщен, коэффициент фильтрации мал, а граничный напор воды меняется довольно быстро и не успевает вызвать фильтрационный процесс.

Окончательное решение дифференциального уравнения (15) имеет следующий вид:

$$P_w(y, t) = P_w(0, t) + \frac{y}{h} P_w(t) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n y}{h} , \quad (16)$$

где

$$g_n(t) = \frac{\dot{g}_n(\tau_1) - \delta_2 g_n(\tau_1)}{\delta_1 - \delta_2} e^{\delta_1 t} + \frac{\dot{g}_n(\tau_1) - \delta_1 g_n(\tau_1)}{\delta_2 - \delta_1} e^{\delta_2 t} + \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{e^{\delta_1(t-\tau)}}{\delta_1 - \delta_2} + \frac{e^{\delta_2(t-\tau)}}{\delta_2 - \delta_1} \right] [F'(\tau) - f_n(\tau)] d\tau ; \quad (16a)$$

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a_n + b_n) \pm \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right] ; \quad (16b)$$

$$a_n = A + C_v \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 ; b_n = \eta C_v \left( \frac{\pi n}{h} \right)^2 ; F_n = \frac{4}{\pi n} F(t) ;$$

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi n} \left\{ \ddot{P}_w(0, t) + \frac{1}{2} \ddot{P}_w(t) + A \left[ \dot{P}_w(h, t) + \frac{1}{2} \dot{P}_w(t) \right] \right\} ; \quad (16в)$$

$$g_n = \frac{4}{\pi n} \left\{ [P(\tau_1) + P_w(\tau_1)] A_0 - \left[ P_w(0, \tau_1) + \frac{1}{2} P_w(\tau_1) \right] \right\} ; \quad (16г)$$

$$\dot{g}_n \tau_1 = \frac{4}{\pi n} \left\{ [\dot{P}(\tau_1) + \dot{P}_w(\tau_1)] A_0 - \left[ \dot{P}_w(0, \tau_1) + \frac{1}{2} \dot{P}_w(\tau_1) \right] + \right. \\ \left. + [P(\tau_1) + P_w(\tau_1)] B_1 - \left[ P_w(0, \tau_1) + \frac{1}{2} P_w(\tau_1) \right] \right\} ; \quad (16д)$$

$$B_1 = \eta \frac{m_{v2}}{m_{v1}} A_0 (1 - A_0) , \quad (17)$$

где  $m_v$  – коэффициент сжимаемости поровой воды;  $m_{v1}$  – коэффициент мгновенно-относительной сжимаемости скелета породы до и после фильтрационной консолидации;  $\eta$  – вязкость поровой воды.

В частном случае, когда внешняя нагрузка, действующая на массив карбонатно-сланцевых пород, постоянная, т.е.  $P(t) = P = \text{const}$ , и давление воды на границах слоя пород и грунта во всем процессе уплотнения равно нулю, т.е.  $P_w(0, t) = P_w(h, t) = 0$ , получим обычное решение одномерной задачи консолидации.

Если же режим изменения граничных условий (нагрузок и напоров) задается в виде линейной, экспоненциальной или периодической функции, то решение не представляет особой трудности, так как в уравнении (16d) подынтегральная функция экспоненциальная и интеграл в таких случаях легко берется.

Так, например, если режим изменения нагрузки и граничных напоров задан в виде

$$F(t) = F(1 - e^{-\alpha t}); \quad P_w(0, t) = P_w(1 - e^{-\beta t}); \quad P_w(h, t) = 0,$$

то получим

$$\begin{aligned} P_w(y, t) = & P_w(0, t) \left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ \frac{\alpha P}{n} - \left[ \left( \frac{e^{\delta_1 t}}{\delta_1 - \delta_2} + \frac{e^{\delta_2 t}}{\delta_2 - \delta_1} \right) A_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + B(1 - \alpha) \left[ \frac{e^{\delta_1 t} - e^{(\delta_1 - \alpha)t}}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 + \alpha)} + \frac{e^{\delta_2 t} - e^{(\delta_2 - \alpha)t}}{(\delta_2 - \delta_1)(\delta_2 + \alpha)} \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{P_w}{2n} (A - B) \left[ \frac{e^{\delta_2 t} - e^{(\delta_2 - \beta)t}}{(\delta_1 - \delta_2)(\delta_2 + \delta_1)} + \frac{e^{\delta_2 t} - e^{(\delta_2 - \beta)t}}{(\delta_2 - \delta_1)(\delta_2 + \beta)} \right] \right\} \sin \frac{\pi n y}{h}. \quad (18) \end{aligned}$$

Этот случай соответствует производству работ по возведению насыпей из пород на слабых грунтовых основаниях, подстилаемых водопроницаемым пластом, например путем намыва песка, когда одновременно возрастают и граничная нагрузка от насыпей из карбонатно-сланцевых пород (как нагрузка многофазного массива), и граничный напор.

Осадку верхнего обезвоженного слоя массива с большим коэффициентом фильтрации пород можно определить без учета ползучести скелета породы и консолидационных процессов. При этом полагаем, что эпюра дополнительных напряжений от собственного веса массива подчиняется треугольному закону распределения, т.е.

$$S = \frac{1}{2} m_v \gamma_T h^2. \quad (19)$$

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что зная коэффициенты сжимаемости поровой воды, мгновенно-относительной сжимаемости породы до и после консолидации стабилизированного уплотнения, коэффициент фильтрации массива и опытные параметры ползучести, можно математически моделировать консолидацию и ползучесть многофазного массива из илито-карбонатно-сланцевых горных пород.

1. *Kavalec B. Problemy geotechniczne i gornicze w dolinach rzek Kochlowski i Klodnichy oraz Potoku Chudowskiego // Konferencja Srodowiskowa Sekcji Mechaniki Gruntow i Skal oraz Fundamentowania Komitetu Inzynierii Ladowej i Wodnej PAN "Geotechnika w Osrodku Gliwickim". - Leszyt 80, 1995. - S. 105-118.*