4. *Tobolsky A.V., Eyring H.* // J. Chem. Phys. – 1943. – 1, 125.

5. *Machlin E.S., Nowick A.S.* // Trans. AIME. – 1947. – 172. – P. 386.

6. *Yokobory T.* // J. Phys. Sjc. Japan. – 1951– 6. – 78.

7. *Журков С.Н., Назуллаев Б.Н.* // ЖТФ. – 1953. – 23. – 1677 с.

8. *Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е.*. Кинетическая природа прочности твердых тел. – Наука: 1974. – 560 с.

9. *Степанов В.А., Песчанская Н.Н., Шнейзман В.В.* Прочность и релаксационные явления в твердых телах. – Л.: Наука, 1984. – 246 с.

УДК 624.539.374

РАСЧЕТ УПРУГО-ВЯЗКОЙ ДИАФРАГМЫ НА СПЛОШНОМ УПРУГО-ВЯЗКОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ФАКТОРА ВРЕМЕНИ

Т. Рембеляк, докт.-инж. (Краковская горно-металлургическая академия, РП)

Шляхом застосування методу розділення змінних можна розв'язати інтегро-диференціальне рівняння вигину діафрагми і деформації основи з урахуванням повзучості матеріалів діафрагми та основи в часі, а також визначити контактні тиски під підошвою діафрагми, прогини в будь-якому перерізі діафрагми, згинальні моменти, поперечні сили. При цьому використовуються параметри повзучості матеріалу діафрагми та основи, змінні модулі деформації діафрагми та основи і величини діафрагменної функції та її коренів.

Рассмотрим случай, когда свойствами ползучести обладают и диафрагма и основание. Допустим, что на диафрагму действует внешняя произвольная нагрузка интенсивностью $q_0(x,\ t)$. Требуется определить совместную работу диафрагмы со сплошным основанием из горных пород.

В качестве исходного параметра принимаем реактивное давление основания. Тогда уравнение деформирования основания можно записать в следующем виде:

$$C_{(t)}V_a(x,t) = P_a(x,t) + \int_{t_0}^{t} P_a(x,t)K_0(t,\tau)d\tau. \qquad (1)$$

Изгиб диафрагмы описывается уравнением

$$E_{(t)}I\,\frac{\partial^4 Y_a(x,t)}{\partial x^4} = q_0(x,t) + \int_{t_0}^{t} q_0(x,t)K(t,\tau)d\tau - P_a(x,t) - \int_{t_0}^{t} P_a(x,\tau)K(t,\tau)d\tau\ , \qquad (2)$$

где $P_a(x, t)$ – реактивное давление; $K_0(t, \tau)$ – коэффициент постели, изменяющийся во времени.

Необходимым условием контакта диафрагмы с основанием является тождество площади подошвы диафрагмы $V(x, t)$ и площади поверхности основания $Y_a(x, t)$: $V(x, t) \equiv Y_a(x, t)$. Исключив из уравнений (1) и (2) $Y(x, t)$, получим интегро-дифференциальное уравнение совместной деформации диафрагмы и основания. Расчет ведется относительно реактивного давления основания $P(x, t)$ с учетом ползучести:

$$\frac{E_{(t)}I}{C_{(t)}}\frac{\partial^4 P_a(x,t)}{\partial x^4}+\frac{E_{(t)}I}{C_{(t)}}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^4 P_a(x,\tau)}{\partial x^4}K_0(t,\tau)d\tau=$$

$$=q_0(x,t)+\int_{t_0}^{t}q_0(x,\tau)K(t,\tau)d\tau-P_a(x,t)-\int_{t_0}^{t}P_a(x,t)K(t,\tau)d\tau\ , \qquad (3)$$

где $E(_t)$ – модуль деформации, изменяющийся во времени t; $C(_t)$ – коэффициент жесткости основания (постели); I – момент инерции.

При решении уравнения (3) применим разделение переменных. Разложим (3) в ряды балочных функций:

нагрузка $\qquad q_0(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}q_K(t)X_K(x);$

реактивное давление $\qquad P_a(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}P_{K.a}(t)X_K(x);$

прогиб $\qquad Y_{K.a}(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}Y_{K.a}(t)X_K(x);$

изгибающий момент $\qquad M_a(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}M_{K.a}(t)X_K''(x);$

поперечная сила $\qquad Q_a(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}Q_{K.a}(t)X_K'''(x)\ , \qquad (4)$

где $Q_{K.a}(t)$, $P_{K.a}(t)$, $Y_{K.a}(t)$, $M_{K.a}(t)$, $q_K(t)$ – коэффициенты разложения данных величин по балочным (диафрагменным) функциям в точке K; Q_a, P_a, Y_a, M_a – то же, разложенное в общем виде.

Балочные функции $X_K(x)$, определяющие формы колебаний оси упругой диафрагмы, обладающей свойствами ортогональности, определяются по формуле

$$X_K^{4}(x)=\frac{n_K^4}{l_K^4}X_K(x)\ . \qquad (5)$$

Балочная функция и величины ее корней n_K зависят от условий опирания и являются известными. При учете ползучести во времени системы основание–диафрагма можно ограничиться первым членом разложения.

Для решения задачи применим основные положения метода разделения переменных, который позволяет свести решение интегро-дифференциального уравнения (3) к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 X_K(x)}{\partial x} = X_K(x) \tag{6}$$

и интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\left[1+\frac{n_K^4 E_{(t)} I}{l^4 C_{(t)}}\right] P_{K.a}(t) + \int_{t_0}^{t} P_{K.a}(\tau)\left[-\frac{n_K^4 E_{(t)} I}{l^4 C_{(t)}} K_0(t,\tau) + K(t,\tau)\right] d\tau =$$

$$= q_K(t) + \int_{t_0}^{t} q_K(\tau) K(t,\tau)\, d\tau . \tag{7}$$

Ядра наследственности и старения определяются по следующим формулам:

а) для диафрагмы:

$$K(t,\tau) = -E_{(t)} \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{1+\varphi(\infty,\tau)\left[1-e^{-\gamma_M (t-\tau)}\right]}{E_{(t)}} ; \tag{8}$$

б) для основания из горных пород

$$K_0(t,\tau) = -C_{(t)} \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{1+\varphi_{1.0}(\infty,\tau)\left[1-e^{-\gamma_0 (t-\tau)}\right]}{C_{(\tau)}} , \tag{9}$$

где $\varphi(t, \tau)$ и $\varphi_{1.0}(t, \tau)$ – реологические свойства материала диафрагмы и основания, определяемые экспериментальным или аналитическим путем.

Для решения задачи примем следующие начальные условия:

$$t = t_0 ; P_K(t_0) = \frac{q'(t_0) C_{(t_0)} l^4}{n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4} ; P'_K(t_0) = \frac{q'_K(t_0) C_{(t_0)} l^4}{n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4} +$$

$$+ P_K(t_0)\left[\gamma_M \varphi(\infty,t_0)\right]\left[1 - \frac{C_{(t_0)} l^4}{n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4} + \frac{\gamma_0 n_K^4 E_{(t_0)} I \varphi_{1.0}(\infty,t_0)}{n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4}\right];$$

$$\frac{P''_K(t_0)}{P'_K(t_0)} = \frac{E'_{(t_0)} C^2_{(t_0)} l^4 + n_K^4 E^2_{(t_0)} I C'_{(t_0)}}{E_{(t_0)} C_{(t_0)}\left[n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4\right]} - \frac{\gamma_0 n_K^4 E_{(t_0)} I \varphi_{1.0}(\infty,t)}{\left[n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4\right]} + \frac{\gamma_M \varphi(\infty,t_0) C_{(t_0)} l^4}{\left[n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4\right]} +$$

$$+ \frac{P_K(t_0)\left[\gamma_0^2 n_K^4 E_{(t_0)} I \varphi_{1.0}(\infty,t_0) + \gamma_M^2 C_{(t_0)} l^4 \varphi(\infty,t)\right]}{q'_K(t_0) C_{(t_0)} l^4 + P_K(t_0)\left\{\gamma_M \varphi(\infty,t_0)\left[n_K^4 E_{(t)} I + C_{(t)} l^4\right] - \left[C_{(t_0)} l^4\right] + \gamma_0 n_K^4 E_{(t_0)} I \varphi_{1.0}(\infty,t_0)\right\}} +$$

$$+\frac{q''_K(t_0)C_{(t_0)}l^4+q'_K(t_0)C_{(t_0)}l^4\left[\gamma_M\varphi(\infty,t)-\dfrac{E'_{(t_0)}}{E_{(t_0)}}\right]}{q'_K(t_0)C_{(t_0)}l^4+P_K(t_0)\{\gamma_M\varphi(\infty,t_0)[n_K^4E_{(t)}I+C_{(t)}l^4]-[C_{(t_0)}l^4]+\gamma_0n_K^4E_{(t_0)}I\varphi_{1,0}(\infty,t_0)\}},\qquad(10)$$

где γ_0, γ_M – объемный вес материала основания и диафрагмы соответственно; $C(t_0)$ – упруго-мгновенный коэффициент постели; $E(t_0)$ – модуль деформации материала диафрагмы в момент времени t_0; $E'(t_0)$ – производный модуль деформации во времени t_0.

Продифференцируем уравнение (7) три раза по верхнему пределу t, складывая результат первого дифференцирования, умноженный на γ_0, с результатом второго дифференцирования, а результат второго дифференцирования, умноженный на γ_M – с результатом третьего дифференцирования. Получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами

$$P'''_{K.a}(t)+\psi(t)P''_{K.a}(t)+\beta(t)P'_{K.a}(t)=S(t)\qquad(11)$$

или

$$S(t)=\frac{q''_K(t)l^4}{C_{(t)}[n_K^4E_{(t)}I+C_{(t)}l^4]}-\frac{q''_K(t)C_{(t)}l^4}{E_{(t)}[n_K^4E_{(t)}I+C_{(t)}l^4]}\times$$

$$[2E'_{(t)}E_{(t)}-\gamma_M-\gamma_M\varphi(\infty,t)+\gamma_0]-\frac{q'_K(t_0)C_{(t)}l^4}{n_K^4E_{(t)}I+C_{(t)}l^4}\times$$

$$\times\left[\frac{E''_{(t)}}{E_{(t)}}+\frac{\gamma_ME'_{(t)}}{E_{(t)}}+\frac{\gamma_M\varphi(\infty,t)E'_{(t)}}{E_{(t)}}+\frac{\gamma_0E'_{(t)}}{E_{(t)}}-\gamma_0\gamma_M-\gamma_M\varphi'(\infty,t)-\gamma_0\gamma_M\varphi(\infty,t)\right].\qquad(12)$$

В результате решения уравнений (11) или (12) можно понизить порядок дифференцирования путем подстановки $P'_K(t)=Y(t)$ и $Y'(t)=Y(t)Z(t)$ и получить уравнение реактивного давления:

$$P_{K.a}(t)=P_K(t_0)+P'_K(t_0)\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{t_0}^{t}\left[2\int_{t_0}^{t}R(\tau)d\tau-\frac{P''_K(t_0)}{P'_K(t_0)}-\frac{\psi(t_0)}{2}+\frac{\psi(\tau)}{2}\right]}d\tau,\qquad(13)$$

где

$$R(\tau)=\beta(\tau)-S(\tau)-\frac{\psi^2(\tau)}{4}-\frac{\psi'(\tau)}{2}.\qquad(14)$$

Определим значения S_1 *(t)*, ψ *(t) и* β *(t)*. Вначале вычислим реактивное давление основания из горных пород:

$$P_a(x,t)=P(x,t_0)+\sum_{K=1}^{t}X_K(x)P'_K(t_0)\int_{t_0}^{t}e^{\eta(\tau,t)}d\tau,\qquad(15)$$

где

$$\eta(\tau_1)=\int_{t_1}^{\tau_1}\left[2\int_{t_0}^{\tau}R_1(\tau)d\tau-\frac{M''_{K.a}(t_0)}{M'_{K.a}(t_0)}-\frac{\psi_1(t_0)}{2}+\frac{\psi_1(\tau)}{2}\right]d\tau;$$

$$R_1(\tau)=\beta_1(\tau)-S_1(\tau)-\frac{\psi_1^2(\tau)}{4}-\frac{\psi'(\tau)}{2};$$

$$M_a(x,t)=M(x,t_0)+\sum_{K=1}^{\infty}X''_K(x)M'_{K.a}(t_0)\int_{t_0}^{t}e^{-\eta(t)}d\tau_1.$$

Таким образом, решение задачи в случае воздействия на диафрагму внешней нагрузки $q_0(x,\ t)$ записываем в следующей последовательности:

1) решив упруго-мгновенную задачу известными методами, определяем реактивное давление основания $P(x,\ t_0)$ в определенных сечениях диафрагмы;

2) определяем для каждого сечения диафрагмы значения балочных (диафрагменных) функций $X_K(x)$ и значения корней n_k;

3) вычисляем

$$P_K(t_0)=\frac{P(x,t)}{X_K(x)};\ q_K(t)=\frac{q(x,t_0)}{X_K(x)};\ q'_K(t_0);\ q''_K(t_0);$$

4) из условия (10) определяем $P'_K(t_0)$; $\dfrac{P''_K(t_0)}{P'_K(t_0)}$;

5) определяем функции $\beta(t)$; $S(t)$; $\Psi(\tau)$; $\Psi'(\tau)$; $R(\tau)$;

6) определяем $P_{K.a}(t)$ из (13);

7) вычисляем $P_a(x,\ t)$ из (15);

8) используя значения $P_{K.a}(t)$, находим коэффициенты разложения прогибов:

$$Y_{K.a}(t)=\frac{P_{K.a}(t)}{C_{(t)}}+\int_{t_0}^{t}-\frac{P_{K.a}(\tau)}{C_{(\tau)}}K_0(t,\tau)d\tau. \qquad (16)$$

Примем следующие начальные условия:

$$t=t_0;\ Y_K(t_0)=\frac{P_K(t_0)}{C_{(t_0)}};\ Y'_K(t_0)=\frac{P'_K(t_0)}{C_{(t_0)}}+\frac{P_K(t_0)\gamma_0\varphi_{1,0}(\infty,t_0)}{C_{(t_0)}}. \qquad (17)$$

Путем дифференцирования по верхнему пределу t интегральное уравнение (16) можно привести к дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами, в результате решения которого получим значение прогиба в любом сечении по длине диафрагмы:

$$Y_a(x,t)=Y_a(x,t_0)+\sum X'_K(x)Y_a(t); \qquad (18)$$

9) зная $Y_a(x,t)$, определяем изгибающий момент из дифференциальной зависимости

$$-E_{(t)}I\,\frac{\partial^2 Y_a(x,t)}{\partial x^2}=M_a(x,t)+\int\limits_{t_0}^{t}M_a(x,t)K(t,\tau)d\tau\,. \qquad (19)$$

Применяя разделение переменных, получим:

а) дифференциальное уравнение

$$\frac{X_K''(x)}{X_K''(x)}=1\,;$$

б) интегральное уравнение

$$E_{(t)}IY_{K.a}(t)=-M_{K.a}(t)-\int\limits_{t_0}^{t}M_{K.a}(\tau)K(t,\tau)d\tau\,. \qquad (20)$$

Начальное условия при $t=t_0$ имеет вид

$$M_K(t_0)=E_{(t_0)}IY_K(t_0).$$

Тогда

$$M_K'(t_0)=E_{(t_0)}I\left[\;Y_K(t_0)\gamma_M\varphi(\infty,t_0)-Y_K'(t_0)\;\right]. \qquad (21)$$

Решив уравнения (20), получим

$$M_{K.a}(t)=M_K(t_0)e^{-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[2\int\limits_{t_0}^{t_1}R_1(\tau_1)d\tau_1-\frac{M'_K(t_0)}{M_K(t_0)}-\frac{\psi(t_0)}{2}+\frac{\psi(\tau)}{2}\right]}d\tau\,, \qquad (22)$$

где

$$R_1(\tau_1)=\beta_1(\tau_1)-S_1(\;\tau_1)-\frac{\varphi_1^2(\tau_1)}{4}-\frac{\varphi_1(\tau_1)}{2}\,;$$

$$S_{1(\tau_1)}=-E_{(\tau_1)}IY_K''(\tau_1)-Y_K'(\tau_1)\left[\gamma_M E_{(\tau_1)}I\right]-Y_K(\tau_1)\left[E''_{(\tau_1)}I-\frac{E'^2_{(\tau_1)}I}{E^2_{(\tau_1)}}\right];$$

$$\psi_1(\tau_1)=\gamma_M\left[1+\varphi(\infty,t)\right];\;\beta_1(\tau_1)=\frac{E''_{(\tau_1)}}{E_{(\tau_1)}}-\frac{2E'^2_{(\tau_1)}}{E^2_{(\tau_1)}}\;. \qquad (23)$$

Уравнение (22) аналогично уравнению (14). Изгибающий момент описывается формулой

$$M_a(x,t)=\sum_{K=1}^{\infty}X_K(x)M_{K.a}(t), \qquad (24)$$

где $X_K(x)$ – диафрагменная функция;

10) вычисляем поперечную силу

$$Q_a(x,t)=q(x,t)-P_a(x,t). \qquad (25)$$

Таким образом, путем применения метода разделения переменных можно решить интегро-дифференциальное уравнение, совместно описывающее изгиб диафрагмы и деформации основания с учетом ползучести во времени материалов диафрагмы и основания, а также определить контактные давления под подошвой диафрагмы $P_a(x, t)$, прогибы в любом сечении диафрагмы $Y_a(x, t)$, изгибающие моменты $M_a(x,t)$, поперечные силы $Q_a(x, t)$. При этом используются параметры ползучести материалов диафрагмы и основания, переменные модули деформации диафрагмы и основания и величины диафрагменной функции и ее корней.

1. *Rembielak T., Hromek A., Platek J.* Zapobieganie pożarom endogenicznym i odwalon w ścianie na drodze wyprzedzajacego iniekcyjnego uszczelniania i wzmacniania rozluzewanego górotworu // Miedzynarodowa Konferencja III Szkola Geomechaniki. – Gliwice–Ustron, Polska, listopad 23–26, 1997. – S. 227– 238.

2. *Rembielak T., Hromek A., Platek J.* Zastosowanie iniekcji uszczelniania i wzmacniania gorotworu w otoczeniu przecznicu 9 KWK "Kazimierz - Juliusz", przed i podczas, jej udrazniania, dla ograniczenia możliwości odnowienia i powstania nowych pożarow endogenicznych // VII Miedzynarodowe Sympozjum Geotechnika –Geotechnics 96. – Gliwice–Ustron, Polska, październik 22–25, 1996.– S. 159–170.

УДК 624.539.3

КОНСОЛИДАЦИЯ И МИНЕРАЛИЗАЦИЯ ИЛИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ СЖАТИИ

Р.А. Самедов, асп. (ИГМ НАН Украины)

При стисненні мулистих грунтів мають місце фільтраційна консолідація, осідання в часі, повзучість скелета породи і мінералізація органічних домішок. Ці процеси необхідно розглядати спільно як єдиний фізичний процес.

При сжатии в илистых грунтах происходит фильтрация воды, а, следовательно, и фильтрационная консолидация. Однако осадка илистых грунтов (уплотнение) не прекращается и после окончания процесса фильтрационной консолидации (когда поровое давление воды приближается к нулю), а продолжается весьма длительное время вследствие ползучести скелета породы.

Консолидация илов как многофазных грунтов связана с взаимодействием твердой и жидкой фаз грунта, изменением их соотношения в пространстве и во времени, другими физико-химическими процессами (тиксотропным упрочнением, старением и др.) и описывается формулой

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + n m_{w} \frac{\partial P_w}{\partial t} = \frac{k_\Phi}{\gamma_w} \nabla^2 P_w , \qquad (1)$$