УДК 622.231

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИНВАРИАНТЫ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД

А.И. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ «КПИ»)

В статті наведено аналітичні вирази для законів збереження при деформації гірської породи і визначено інваріантні механічні характеристики, які дозволяють розробити науково обґрунтовану класифікацію гірських порід при їх руйнуванні.

Введение

Процессы деформации и разрушения горных пород являются достаточно распространенными в природе и широко используются человеком в его практической жизнедеятельности. Однако коэффициент полезного действия процессов технологического разрушения не превышает нескольких процентов, что свидетельствует о недостаточном уровне научной проработки вопросов, связанных с разрушением твердых тел вообще и горных пород в частности.

При теоретических и экспериментальных исследованиях деформирования горных пород важную роль играют так называемые законы сохранения, позволяющие устанавливать основные характеристики процесса. Набор инвариантных параметров является достаточно объективной характеристикой механических свойств конкретной горной породы и может быть положен в основу классификации горных пород.

Преобразования Лоренца для смещения точек массива при его деформации

При нагружении массива горной породы точки массива будут смещаться в пространстве. При этом координаты смещения любой выделенной точки претерпят преобразование Лоренца, которое представляет собой формулы перехода от координат и времени в одной инерциальной системе отсчета к координатам и времени в другой инерциальной системе, движущейся относительно первой:

$$x_i' = a_i + \sum_{k=0}^{3} e_k a_{ik} x_k \,. \qquad (1)$$

Постоянные $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$ соответствуют изменению начала отсчета для координат и времени. Если при $t = 0$ начала координат старой и новой систем отсчета совпадают, то $a_i = 0$. Коэффициенты a_{ik} есть относительная скорость движения двух систем.

Формулы преобразования Лоренца иногда удобнее писать в векторной форме (трехмерные обозначения):

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c_2}}}\left[t - \frac{1}{c^2}\left(\vec{V}\vec{r}\right)\right], \tag{2}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\vec{V}}{V^2}\left[\left(\vec{V}\vec{r}\right) - V^2 t\right]. \tag{3}$$

Изменение вектора $\vec{r}_b$ для точки b происходит по двум причинам: из-за векторного характера $\vec{r}_b$ и изменения времени t при переходе от одной системы к другой.

Согласно выражению (1) приращение радиус-вектора с учетом пространственного поворота равно

$$\Delta\vec{r}_b = \vec{a} - \vec{V}t + \left[\vec{\varphi} \times \vec{r}_b\right]. \tag{4}$$

Временная составляющая пространственно-временного вектора меняется на величину

$$\Delta t_b = \tau - \frac{1}{c^2}\left(\vec{V} \cdot \vec{r}_b\right), \tag{5}$$

где τ – величина, учитывающая изменение начала отсчета времени.

Полное приращение вектора выразится через параметры бесконечно малого преобразования Лоренца следующим образом:

$$\delta\vec{r}_b = -\vec{V}_b\tau + \vec{a} - \vec{V}t + \frac{1}{c^2}\vec{V}_b\left(\vec{V} \cdot \vec{r}_b\right) + \left[\vec{\varphi} \times \vec{r}_b\right]. \tag{6}$$

Полное изменение скорости точки B равно

$$\delta\vec{V}_b = \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_b. \tag{7}$$

Законы сохранения при деформировании горных пород

Запишем изменение функции Лагранжа для системы частиц породы в горном массиве при его деформации:

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a}\delta\vec{V}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\delta\vec{r}_a\right). \tag{8}$$

Учитывая выражение (7), получим

$$\delta L = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a}\delta \vec{r}_a . \tag{9}$$

Для ковариантности уравнений движения частиц массива достаточно, чтобы разность

$$[L'(t) - L(t)]dt = dF \tag{10}$$

была полным дифференциалом некоторой функции F. Вычисления показывают [1], что соотношение (10) действительно выполняется, причем указанная функция равна

$$F = \sum_a \left[-m_a + \frac{m_a V_a^2}{2c^2} - \frac{e_a}{2c^2}\sum_b \frac{e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} \right] \left(\vec{V} \cdot \vec{r}_a \right), \tag{11}$$

где m_a – масса частицы a; e_a, e_b – заряд соответственно частицы a и частицы b.

Тогда

$$\delta L = -\tau \frac{dL}{dt} + \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\tau L - F \right). \tag{12}$$

Приравнивая (9) и (12), получим

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a}\delta \vec{r}_a + L\tau - F \right] = 0 , \tag{13}$$

следовательно, выражение в квадратных скобках будет постоянным при изменении десяти параметров ($\tau, \vec{a}, \vec{V}, \vec{\varphi}$) в преобразовании Лоренца.

Подставляя в уравнение (13) выражение (6) и (11), запишем выражение для полного действия деформированного объема:

$$D = -\tau W + \left(\vec{a} \cdot \vec{P} \right) + \left(\vec{V} \cdot \vec{K} \right) + \left(\vec{\varphi} \cdot \vec{M} \right) = \text{const}, \tag{14}$$

где функции $W, \vec{P}, \vec{K}, \vec{M}$ не зависят от параметров преобразования Лоренца и могут быть записаны следующим образом [2]:

интеграл энергии

$$W = \sum_a \vec{V}_a \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a} - L ; \tag{15}$$

интеграл импульса (количества движения) частиц горной породы

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_a} ; \tag{16}$$

интеграл момента движения центра инерции

$$\vec{K} = \frac{W}{c^2}\vec{R} - t\vec{P}, \tag{17}$$

где

$$\vec{R} = \left\{ \sum_a \left[m_a\left(1 + \frac{V_a^2}{2c^2}\right) + \frac{e_a}{2c^2}\sum_b \frac{e_b}{\left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|} \right]\vec{r}_a \right\} \frac{c^2}{W}; \tag{18}$$

интеграл момента количества движения нагруженной части горного массива

$$\vec{M} = \sum_a \left[m_a\left(1 + \frac{V_a^2}{2c^2}\right) + \frac{1}{2c^2}\sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{\left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|} \right]\left[\vec{r}_a \times \vec{V}_b\right]. \tag{19}$$

Таким образом, мы получили десять интегралов движения частиц массива горных пород при его деформации, причем каждый из них связан с соответствующим параметром при бесконечно малом преобразовании Лоренца (1). Левая часть выражения (14) для полного действия деформируемого объема должна быть постоянной, а это возможно только тогда, когда величины $W, \vec{P}, \vec{K}, \vec{M}$ будут постоянными.

Следовательно, приведенные десять интегралов представляют собой классические инварианты движения частиц горного массива при его деформации и разрушении.

Тензорный характер полного действия при деформации горного массива

Проведя прямое преобразование Лоренца составляющих энергии и импульса, можно заключить [2], что составляющие P_x, P_y, P_z вектора $\vec{P}$ преобразуются как пространственные координаты, а полная масса $M = \frac{W}{c_2}$ преобразуется как временная координата. Тогда совокупность величин

$$P^0 = Mc, \quad P^1 = P_x, \quad P^2 = P_y, \quad P^3 = P_z \tag{20}$$

представляет собой контравариантный вектор.

Анализ характера преобразования величин $\vec{K}$ и $\vec{M}$ показывает, что вектор суммарного момента центра инерции $\vec{K}$ преобразуется как полярный вектор:

$$\vec{K}' = \frac{\vec{V}}{V^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{K}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left\{ \vec{K} - \frac{\vec{V}}{V^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{K}\right) - \frac{1}{c^2}\left[\vec{V}\times\vec{M}\right] \right\}, \tag{21}$$

а вектор суммарного количества движения $\vec{M}$ преобразуется как аксиальный вектор:

$$\vec{M}' = \frac{\vec{V}}{V^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{M}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left\{\vec{M} - \frac{\vec{V}}{V^2}\left(\vec{V}\cdot\vec{M}\right) + \left[\vec{V}\times\vec{K}\right]\right\}. \tag{22}$$

Таким образом, можем ввести антисимметричный тензор с контравариантными составляющими:

$$M^{23} = M_x;\ \ M^{31} = M_y;\ \ M^{12} = M_z; \tag{23}$$

$$M^{10} = cK_x;\ M^{20} = cK_y;\ M^{30} = cK_z. \tag{24}$$

Введем обозначения:

$$a_0 = c\tau;\ a_x = -a_1;\ a_y = -a_2;\ a_z = -a_3; \tag{25}$$

$$\varphi_{10} = \frac{V_x}{c};\ \ \varphi_{20} = \frac{V_y}{c};\ \ \varphi_{30} = \frac{V_z}{c}; \tag{26}$$

$$\varphi_{23} = \varphi_x;\ \ \varphi_{31} = \varphi_y;\ \ \varphi_{12} = \varphi_z. \tag{27}$$

Здесь φ_{ik} – ковариантные составляющие антисимметричного тензора. Тогда для полного действия можно записать тензор

$$D = -\sum_{i=0}^{3} a_i P^i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{3}\varphi_{ik}M^{ik}, \tag{28}$$

что также подтверждает инвариантность полного действия при деформации объема горной породы.

Выводы

1. При деформации горного массива частицы вещества смещаются в пространстве. Для описания процессов деформации и разрушения массива необходимо использовать инварианты движения.

2. Анализ показал, что такой инвариантной величиной является полная суммарная энергия системы, включающая внутреннюю энергию частиц и энергию их взаимодействия:

$$W = c^2\sum_a m_a + U = \mathrm{const}.$$

3. Сумма импульсов частиц при деформации массива $\vec{P}$ также является инвариантом движения:

$$\vec{P} = \sum_a m_a\vec{V}_a\left(1 + \frac{V_a^2}{2c^2}\right) + \frac{1}{2c^2}\sum_{a,b}\frac{e_a e_b}{\left|\vec{r}_a - \vec{r}_d\right|}\vec{V}_a = \mathrm{const}.$$

4. Третьим инвариантом является суммарный момент центра инерции $\vec{K}$. Постоянство величины $\vec{K}$ дает закон движения центра инерции системы.

5. Сумма моментов количества движения частиц $\vec{M}$ также является инвариантом и может характеризовать конкретную горную породу с определенной точки зрения.

6. Наиболее общим инвариантом является тензор суммарного действия $\vec{D}$ для частиц породы при деформации и разрушении массива. Отношение этого действия к суммарному объему разрушенного материала также является инвариантной величиной и может характеризовать способность горных пород к разрушению.

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Теория поля: Учебное пособие. – 7-е изд. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

2. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Гос. изд. физико-матем. литер., 1961. – 563 с.

УДК 539.3+624.139.329

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ГРУНТОВОМ МАССИВЕ

Н.С. Ремез, канд. техн. наук (ЗАО «Техновзрыв»)

Виконано чисельне моделювання взаємодії вибухових хвиль з циліндричною оболонкою у грунтовому масиві. Конструкція вивчається в рамках нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка. Грунт моделюється твердим пористим багатокомпонентним середовищем зі змінним коефіцієнтом об'ємної в'язкості. Отримано залежності взаємодії хвильових процесів у оболонці та грунтовому масиві від часу.

Поведение тонкостенных оболочек при импульсном нагружении описано в значительном количестве публикаций, но вопросам динамического взаимодействия оболочечных конструкций с заполняющими и окружающими средами уделено внимание в немногих работах. В данной работе рассматривается взаимодействие тонкой цилиндрической оболочки с окружающим грунтовым массивом при внутреннем взрывном нагружении. Эта система имитирует взрыв во взрывной камере, подземном хранилище взрывчатых веществ, трубопроводе, на подземной станции метро или при освобождении бурильных колонн от прихватов при проведении буровых работ.

Рассматривается связанная задача для системы оболочка–грунт, обусловленная связанностью полей термодинамических величин. Математической моделью процесса динамического деформирования конструкции является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений теории оболочек типа Тимошенко. Деформированное состояние оболочки определяется через компоненты обобщенного вектора перемещения U_1, U_3, ϕ_1.