Отримані результати (різниця між моментами складає 26,2...149 %, між нормальними силами – 2,8...179,3 %) дозволяють зробити висновок, що при розрахунку реальних пілонних станцій за допомогою плоских схем отримують завищені значення моментів, що веде до збільшення перерізу обробок, перевитрати арматури, подорожчання будівництва.

Важливе значення має зв'язок розрахункової схеми з реологічними властивостями навколишнього масиву.

Дослідженнями доведена можливість застосування структурно-механічних моделей ґрунту при розрахунку системи кріплення–масив. Зараз ні в кого не викликає сумнівів, що найбільш раціональним методом розрахунку постійного кріплення станцій метрополітену глибокого закладення та інших підземних споруд є МСЕ, який дозволяє розраховувати підземні споруди з урахуванням реологічних властивостей ґрунтів, складних інженерно-геологічних умов, а також технологічних особливостей проведення робіт.

1. *Мостков В. М., Орлов В. А., Степанов П. Д. и др.* Подземные гидротехнические сооружения. Под ред. В. М. Мосткова. – М.: Высшая школа. – 1986. – С. 207–208.

2. *Волков В. П., Наумов С. Н., Пирожкова А. Н. и др.* Тоннели и метрополитены / Под ред. В. П. Волкова. – М.: Транспорт, 1975. – 552 с.

3. *Бугаева О. Е.* Проектирование обделок транспортных тоннелей. – Л.: изд. ЛИИЖТ, 1966. – 75 с.

4. *Фотиева Н. Н.* Расчет обделок тоннелей некругового поперечного сечения. – М.: Стройиздат, 1974. – 240 с.

5. *Юркевич П.* Геомеханические модели в современном строительстве / Подземное пространство мира. – 1996. – № 1–2. – С. 10–31.

УДК 539.377:536.12

О ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ В ДЕФОРМИРОВАННОМ МАССИВЕ ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ ЭНДОГЕННОМ ПОЖАРЕ

Т. Рембеляк, докт.-инж.
(Краковская горно-металлургическая академия, РП)

З допомогою відомих теплофізичних параметрів можна розв'язати задачі управління термопружними напруженнями та переміщеннями в деформівному масиві гірських порід при ендогенній пожежі і запобігти небезпеці підземної пожежі.

Если условно вырезать из горной породы монолит, то его можно считать изотропным однородным упругим телом, занимающим ограниченную область A с границей D ($\overline{A} = A$, в области D). Установив датчики напряжения и температур в теле породы, можно управлять напряжениями и перемещениями во время эндогенных пожаров.

Допустим, что от пожара возникает нестационарное температурнос поле $T(x,\tau)$ в области ($x \in \overline{A}$ при $\tau \geq 0$) в теле горной породы с внутренним источником тепла $Q(x,\tau)$ и конвективным теплообменом на границе области теплопроводности $\overline{A}$ горной породы, которое описывается уравнением

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{div}(\lambda \,\mathrm{grad}\, T) + Q, \text{ при } x \in A,\ \tau > 0 \tag{1}$$

с начальным

$$T(x,0) = f(x),\ x \in \overline{A} \tag{2}$$

и граничным

$$\lambda\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial n} + \alpha[T(x,\tau) - \theta(x,\tau)] = 0, \text{ при } x \in D,\ \tau > 0 \tag{3}$$

условиями. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точки в трехмерном евклидовом пространстве; τ – время; c, ρ, λ – соответственно удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности горной породы; α – коэффициент теплообмена; $\theta(x,\tau)$ – температура окружающей среды при пожаре; n – внешняя нормаль к границе D.

Для однородного изотропного тела в случае отсутствия объемных сил квазистатическая несвязная задача термоупругости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial e}{\partial x_i} + (1-2\mu)\Delta u_i = 2(1+\mu)\alpha_T\frac{\partial T}{\partial x_i}, \text{ где } x \in A,\ i = 1,2,3,\ldots; \tag{4}$$

$$2E\left[\mu e + (1-2\mu)\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - (1+\mu)\alpha_T T\right]n_i + E(1-2\mu)\cdot\sum_{j=1}^{3} / \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)n_i = X_i(x),\ x \in D_2; \tag{5}$$

с граничными условиями

$$u_i(x) = S_i(x),\ x \in D_1,\ i = 1,2,3,\ldots, \tag{6}$$

где D_1 и D_2 находятся в области D.

Здесь $u_i(i=1,2,3)$ – компоненты вектора перемещений соответственно в направлении координаты x_i; $e=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ – объемная деформация; E, μ, α_T – соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения; граничные условия (5) выражают заданные компоненты вектора перемещений на части границы D_1 в области D, а (6) – заданные компоненты поверхностных усилий в направлении координат x_i на остальной части границы D_2 в области D, где $D_2 \in D$ (D = D_1 в области D_2); $n_i(i=1,2,3)$ – направляющие косинусы внешней нормали n к граничной поверхности D; знак Σ' означает суммирование без члена $j = i$.

Для определения компонент тензора температурных напряжений $\sigma_{i,j}(i,j=1,2,3)$ служат физические соотношения, вытекающие из закона Дюгамеля–Неймана, приведенные в работах Б. Боли, Дж. Уэйнера [1] и А. Д. Коваленко [2]:

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\mu e\delta_{ij}+(1-\mu)e_{ij}-(1+\mu)\alpha_T T\delta_{ij}\right), \tag{7}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$; компоненты тензора деформаций $e_{ij}(i,j=1,2,3)$ выражаются через компоненты перемещений в следующем виде:

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ i,j=1,2,3. \tag{8}$$

Найдем обобщенное решение уравнения теплопроводности горной породы (1)–(3) в области A и во времени $\tau\in(0,\tau_1)$ в виде непрерывных функций по координатам $x_i(i=1,2,3)$ и времени τ, то есть решение, которое принадлежит пространству функций в области $C[A(0,\tau_1)]$. Тогда решения уравнений (4)–(6) для компонентов вектора перемещений $u_i(i=1,2,3)$ являются единственными, принадлежащими этому пространству непрерывных функций по координатам $C_1(A)$. На основании выражений (7)–(8) нетрудно заметить, что компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$ будут принадлежать пространству $C(A)$.

В случае отсутствия в граничных условиях поверхностных усилий и принудительных перемещений напряжения $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$ в виде решения уравнений термоупругости (4)–(8) являются следствием неравномерного температурного поля от эндогенного пожара $T(x,\tau)$ и термоупругости локально нагретого участка горной породы по теплопроводности (1)–(3). Накопление внутренних источников тепла, теплообмен на границе тела и неравномерное начальное распределение температур $Q(x,\tau)$, $\theta(x,\tau)$ и $f(x)$ служат причиной возникновения неравномерного температурного поля, температурных перемещений и напряжений.

Последовательное решение уравнений теплопроводности (1)–(3) и термоупругости (4)–(8) при заданных функциях $Q(x,\tau)$, $\theta(x,\tau)$ и $f(x)$ относится к прямым задачам теплопроводности и термоупругости.

Следует отметить, что в термомеханике существуют два вида постановки и решения тепловых задач – прямые и обратные задачи. В прямых задачах всегда задается причина (тепловое воздействие внутри тела или на его границе), а определяется следствие (температурное поле или напряжения в теле). При этом никаких недоразумений с точки зрения существования решения и его устойчивости не возникает, то есть прямая задача теплопроводности и термомеханики всегда корректна.

В обратных задачах по заданным термонапряжениям или параметрам теплового процесса (максимальной температуре тела, скорости изменения температуры в отдельных точках, перепаду температур, градиенту температурного поля) требуется определить тепловое воздействие, то есть причину возникновения этих величин. Однако решения такой обратной задачи может и не существовать. Поэтому обратная задача теплопроводности и термомеханики вообще некорректна, хотя в некоторых обратных задачах решения существуют.

Современная теория термоупругости, как видно из источников [2, 3, 4, 5], предназначена для решения прямых задач. Однако на практике зачастую необходимо определить причину возникновения температурных перемещений или напряжений, то есть найти функции $Q(x,\tau)$, $\theta(x,\tau)$ или $f(x)$ на основании заданных перемещений или напряжений. Такая задача термоупругости, как и задача теплопроводности, относится к обратным задачам.

Для управления термонапряженным состоянием массива горных пород, деформируемого от температуры пожара, наиболее интересным является осуществление его с помощью функций управления $Q(x,\tau)$ или $\theta(x,\tau)$, либо $Q(x,\tau)$ и $\theta(x,\tau)$ одновременно. Обозначим это управление функцией $U(x,\tau)$ и поставим задачу: найти такое управление $U(x,\tau)$ в области $U(x,\tau)\in C[A(0,\tau_1)]$, чтобы функционал

$$F(U)=\max_{(x,\tau)}\left|W(x,\tau,u)-\varphi(x,\tau)\right|,\ (x,\tau)\in[A_1(0,\tau_1)] \qquad (9)$$

достигал своего минимума. Здесь $W(x,\tau,u)$ – одна из компонент вектора перемещений или тензора напряжений; $\varphi(x,\tau)$ – требуемое распределение этой компоненты в области A_1 в пределах $\bar{A}$.

Для нахождения функций управления $U(x,\tau)$, обеспечивающих достижение точной нижней грани функционала (9), то есть для решения уравнения

$$F(u) = 0,$$

необходимо определить равенство

$$W(x, \tau, u) = \varphi(x, \tau),\ \text{когда}\ (x, \tau) \in [A_1(0, \tau_1)]. \qquad (10)$$

Можно считать, что управление температурными напряжениями и перемещениями, обеспечивающее равенство (10), существует при соответствующих требованиях для конкретных задач, когда обеспечивается гладкость функции $\varphi(x, \tau)$, ее интегрируемость либо согласованность ее распределения с начальными и граничными условиями задачи теплопроводности горных пород, нагреваемых температурами эндогенного пожара. При нарушении этих требований управление $U(x, \tau)$ можно построить с помощью непрерывных функций, приведенных в выражении (9).

Предположим, что решение уравнения теплопроводности (1)–(3) и термоупругости (4)–(8) найдены в следующем виде:

$$T(x, \tau) = \int_0^\tau \int_A G(x, \xi, \tau, \eta) R(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^\tau \int_D G_1(x, \xi, \tau, \eta) \theta(\xi, \eta) d\xi d\eta; \qquad (11)$$

$$u_i(x, \tau) = \int_A G_i(x, \xi) T(\xi, \tau) d\xi,\ i = 1,2,3 \quad; \qquad (12)$$

$$\sigma_{ij}(x, \tau) = \int_A G_{ij}(x, \xi) T(\xi, \tau) d\xi,\ i, j = 1,2,3, \qquad (13)$$

где $G(x, \xi, \tau, \eta)$, $G_1(x, \xi, \tau, \eta)$, $G_i(x, \xi)$; $(i = 1,2,3)$, $G_{ij}(x, \xi)$; $(i, j = 1,2,3)$ – известные функции влияния, или функции Грина решений соответствующих задач;

$$R(x, \tau) = Q(x, \tau) + \delta(\tau) f(x);$$

$\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака [6].

Тогда если в качестве управления выступает функция распределения внутренних источников тепла $Q(x, \tau)$ или температура $\theta(x, \tau)$ окружающей среды, то на основании выражений (11), (12) либо (11), (13) и равенства (10) для отыскания управления можно получить интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^\tau \int_{A_2} K(x, \xi, \tau, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi_1(x, \tau),\ (x, \tau) \in [A_1(0, \tau_1)],$$

где области A_i находятся на участке $\bar{A}$ $(i = 1, 2)$, и, в частности, $A_1 \in \bar{A}$ и $A_2 = D$ в случае $u = \theta$; $K(x, \xi, \tau, \eta)$, $\varphi_1(x, \tau)$ – известные функции.

Построение решения интегрального управления первого рода (14) представляет собой вообще некорректную задачу, однако его решение для конкретных задач в случаях одномерного и двухмерного температурных полей существуют. Для определения функций K и φ_1 прежде всего следует иметь соотношения (11)–(13), то есть решения задач теплопроводности (1)–(3) и термоупругости (4)–(8).

Решение задачи теплопроводности в виде (11) для одномерных и двухмерных нестационарных температурных полей от эндогенного пожара по сравнению с решением задачи термоупругости значительно проще при рассмотрении конкретных задач управления, исходя из того, что теплофизические параметры горных пород во многих случаях являются известными или определяются исследованиями в лабораторных условиях.

Таким образом, с помощью известных теплофизических параметров можно решить задачи управления термоупругими напряжениями и перемещениями в деформируемом массиве горных пород при эндогенном пожаре и предотвратить опасность подземного пожара.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев.: Наук. думка, 1970. – 307 с.

3. *Hand E. I., Arora I. S.* Applied Optimal Design: Mechanical and Structural systems. – N.Y.: Wiley, 1979. – 506 p.

4. *Mangeron D., Poterasu V. F., Vulpe A.* Teoria optimizarii structurilor cu aplicatii. – Jasi: Tunimea, 1980. – 204 p.

5. *Rozvany G. I. N.* Optimal Design of Flexural Systems. – Oxford: Pergamon press, 1976. – 297 p.

6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

УДК 622.231

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ СКАЛЬНОЙ ПОРОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЫ

А. И. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ "КПИ")

Розглянуто квантово-механічний підхід до моделювання процесу руйнування гірської породи, що базується на рівнянні Шредінгера та методі ефективної маси.

Скальная порода представляет собой более или менее упорядоченную смесь кристаллов отдельных минералов. Простейшей пространственной моделью такой породы является кристаллическая решетка твердого тела со средним расстоянием между атомами в узлах решетки 3…5 Å.