

## **ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА РАЗРЫХЛЕНИЯ ОТ СООТНОШЕНИЯ РАЗМЕРОВ ФРАКЦИЙ, ПЛОТНОСТИ ЗАПОЛНЕНИЯ ИМИ ОБЪЕМА И ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

*Р. С. Крысин, докт. техн. наук (НГУ, Днепропетровск)  
В. В. Новинский, инж. (ЗАО «Турстрой-Украина»)*

*Моделюються фракційні склади гірничої маси з віддаллю від центру вибуху зосередженого заряду в гірських породах. Доведено, що використання монокуль як характеристик форми кусків дозволяє застосовувати досить прості математичні методи і описувати різні розподілення кусків у тілі дроблення, а також оцінювати їх кількісно через коефіцієнт розпушення.*

Обычно гранулометрический состав горной массы представляют как совокупность объемных размеров фракций, выраженную в процентах по отношению к общему объему отбитой взрывом породы. Однако такой метод описания гранулометрического состава невозможно реализовать на практике, поскольку требуется измерять куски в трех направлениях, вычислять их объемы и затем классифицировать по фракциям. Информация о фракционном составе горной массы крайне необходима как обратная связь управления буровзрывными работами (БВР) на карьере. Все последующие операции добычного цикла зависят от кусковатости разрыхленной взрывом породы. Ею же определяется и себестоимость добычи, которая в настоящее время, наряду с качеством полезного ископаемого, определяет его конкурентоспособность на рынке.

Наиболее полно вопросы прогнозирования гранулометрического состава изложены в [1]. Принимая во внимание сложность и стационарность процесса разрушения пород действием взрыва, авторы наряду с детерминистскими методами описания разрушений используют и вероятностные. В рамках этой теории гранулометрический состав взорванной горной массы зависит от свойств взрываемого массива, что определяет параметры распределения кусков в рассматриваемом объеме. Поэтому для описания кусковатости авторы принимают распределение Вейбулла.

Однако в инженерных расчетах технологических процессов в карьере, связанных с гранулометрическим составом горной массы, удобнее пользоваться обобщенным показателем – коэффициентом разрыхления. Исследованиями Н. П. Сеинова [2] установлена общая тенденция увеличения коэффициента разрыхления с ростом содержания крупных кусков. При этом затрудняется процесс черпания, увеличивается время цикла, уменьшаются степень полезного использования емкости ковша экскаватора и коэффициент наполнения ковша. Поэтому при оптимизации параметров БВР, обеспечивающих минимум затрат

на выполнение основных операций в карьере, необходимо установить взаимосвязь между характеристиками грансостава и коэффициентом разрыхления.

Ранее в работе [3] было показано, что использование моношаров в качестве характеристики формы кусков позволяет применить достаточно простые математические методы, позволяющие описать различные распределения кусков в теле дробления и оценить их количественно через коэффициент разрыхления. Под телом дробления понимается объем, в пределах которого сосредоточенный заряд производит дробление породы.

Поскольку основные разрушения от взрыва заряда ВВ развиваются в виде радиальных трещин, то они ограничивают секторообразные зоны, в пределах которых происходят разрушения как под действием волны сжатия (зона переизмельчения), так и волны разгрузки (концентрические трещины). В настоящей работе рассмотрена задача для общего случая – конической симметрии, когда тело дробления от взрыва сферического заряда ограничено конусом со сферическим основанием. Рассмотрение сферического заряда позволяет легко перейти к цилиндрическому (как сумме сферических), а тело дробления представить в виде плоской конической фигуры или рассмотреть разрушение в пределах полусферы при равенстве  $\pi/2$  пространственного угла конуса.

Таким образом, от сферического сектора в виде конуса можно перейти к частным случаям плоской цилиндрической или сферической симметрии при традиционной плоской постановке задачи.

При взрыве заряда разрушения в пределах тела дробления будут убывать с расстоянием от заряда. При этом возможны различные варианты распределений кусков в рассматриваемом объеме, которые можно описать посредством коэффициента разрыхления и математического ожидания среднего куска. Для того, чтобы средний объем куска был однозначной и представительной характеристикой кусковатости, вводится среднеквадратическое отклонение, которое учитывает соотношение размеров кусков в теле дробления. При этом чем больше величина среднеквадратического отклонения, тем более неравномерно дробление.

Поскольку коэффициент разрыхления представляет собой отношение объема породы в разрыхленном состоянии к объему породы в целике, то его величина будет определяться плотностью заполнения объема кусками. При этом возможно различное размещение кусков в зависимости от их размеров и потенциальной энергии положения. В работе [1] были рассмотрены некоторые случаи заполнения объема в зависимости от потенциальной энергии шаров и установлено влияние последней на величину коэффициента разрыхления.

Рассмотрим различные схемы заполнения шарового сектора моношарами, отличающимися размерами и взаимным расположением. Установим их влияние на величину коэффициента разрыхления. Это важно по той причине, что в реальном случае разрушения массива возможна каждая из схем.

Используем полученные в [1] результаты для определения зависимости коэффициента разрыхления от параметров распределения кусков. Будем

считать, что единичный заряд с центром в точке  $O$  производит дробление монолитной породы в объеме шарового сектора (рис. 1).

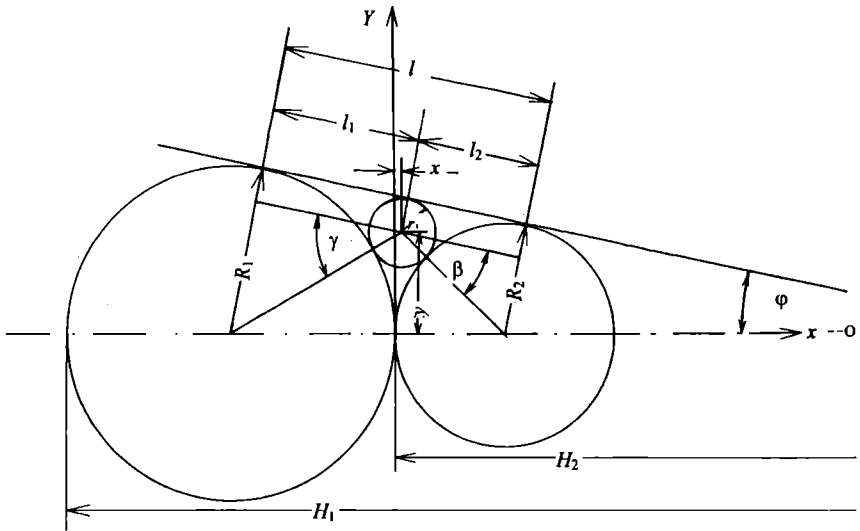


Рис. 1. Схема к расчету коэффициента разрыхления в теле дробления в виде шарового сектора:  $l_1, l_2, l_3$  – расстояние между центрами шаров в теле дробления

Вначале рассмотрим случай взаимного расположения в теле дробления соразмерных кусков с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Предположим, что куски, образующиеся после взрыва, имеют шарообразную форму и увеличиваются с ростом расстояния от заряда. При этом максимальный размер куска может быть равен максимальному размеру естественной отдельности. Обозначим через  $R_1$  максимальный размер куска. Угол конической поверхности обозначим через  $2\varphi$ . Максимальное расстояние от заряда до точки, при которой еще происходит дробление, обозначим через  $H_1$ . Как следует из рис. 1,

$$\frac{R_1}{H_1 - R_1} = \sin\varphi. \quad (1)$$

Отсюда находим

$$R_1 = H_1 \frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi}. \quad (2)$$

Далее

$$H_2 = H_1 - 2R_1 = H_1 \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}; \quad R_2 = H_1 \frac{\sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}. \quad (3)$$

Выразив из (1)  $H_1$  через  $R_1$  и подставив в (3), получим соотношение для двух рядом расположенных шаров с различными радиусами:

$$R_2 = R_1 \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi}. \quad (4)$$

В общем случае получим следующее рекуррентное соотношение:

$$R_n = R_1 \left( \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \right)^{n-1}.$$

После тригонометрических преобразований получим соотношение

$$R_n = R_1 \left[ \frac{1 - \cos(\pi/2 - \varphi)}{1 + \cos(\pi/2 - \varphi)} \right]^{n-1} = R_1 \left[ \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})} \right]^{n-1} = R_1 \operatorname{tg}^{2(n-1)}(\pi/4 - \varphi/2).$$

Эта формула позволяет определить, в зависимости от угла  $\varphi$ , любое значение  $R_n$  от величины наибольшего куска в теле дробления, в том числе и от величины максимальной естественной отдельности.

Для нахождения коэффициента разрыхления вычислим суммарный объем  $n$  шаров с радиусами  $R_1, R_2, \dots, R_n$ :

$$\sum_{i=1}^n V_{(i)} = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \operatorname{tg}^{6(i-1)}(\pi/4 - \varphi/2), \quad (5)$$

$$\text{где } V_{(i)} = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \operatorname{tg}^{6(i-1)}(\pi/4 - \varphi/2) - \text{объем } i\text{-го шара.} \quad (6)$$

Последний множитель в формуле (5) представляет собой сумму  $n$  членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $\operatorname{tg}^6(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$ :

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^{6(i-1)}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^{6n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

поэтому формулу (5) можно представить в виде

$$V_n = \frac{4}{3} \pi \frac{1 - \operatorname{tg}^{6n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} R_1^3. \quad (7)$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то получим суммарный объем бесконечно большого количества шаров:

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi \frac{R_1^3}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (8)$$

Определим математическое ожидание для объемов шаров, расположенных в объеме (8). Вероятность, с которой появляется  $i$ -й шар, пропорциональна его объему и равна доле, которую он занимает в общем объеме всех шаров:

$$P_i = \frac{V_{(i)}}{V_n},$$

где  $V_{(i)}$  – объем  $i$ -го шара.

Следовательно, математическое ожидание равно

$$\bar{V}_n = P_1 V_{(1)} + P_2 V_{(2)} + \dots + P_n V_{(n)}$$

или

$$\bar{V}_n = \frac{1}{V_n} \sum_{i=1}^n V_{(i)}^2. \quad (9)$$

В формулу (9) подставим вместо  $\bar{V}_n$  выражение (7), а вместо  $V_{(i)}$  – (6), тогда

$$\bar{V}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^{12(i-1)} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} V_{(1)} = \frac{\frac{1 - \operatorname{tg}^{12n} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}}{1 - \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} V_{(1)};$$

$$\bar{V}_n = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \frac{1 + \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (10)$$

В случае бесконечно большого количества шаров, то есть при  $n \rightarrow \infty$ , для математического ожидания получим выражение

$$\bar{V}_0 = \frac{4}{3} \pi \frac{R_1^3}{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)},$$

которое при  $\varphi = 0$  соответствует теореме Архимеда об объеме шара, вписанного в цилиндр, и свидетельствует о корректности постановки задачи и приведенных вычислений.

Определим среднеквадратическое отклонение для шаров, распределенных по рассматриваемому закону. Для этого воспользуемся известной формулой

$$\bar{V}_n = \sqrt{\alpha_2 - (\bar{V}_0)^2}, \quad (11)$$

где  $\alpha_2$  – второй центральный момент, который находим по формуле

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^n P_i V_{(i)}^2. \quad (12)$$

Подставив в формулу (12) выражения (6) и (10), получим

$$\alpha_2 = V_{(1)}^2 \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{tg}^{18(i-1)} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} = V_{(1)}^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{12n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (13)$$

Из формулы (10) находим

$$\overline{V_n^2} = V_{(1)}^2 \left[ \frac{1 + \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \right]^2. \quad (14)$$

Далее, подставляя (13) и (14) в формулу (11), получаем выражение для среднеквадратического отклонения текущего объема куска от математического ожидания среднего:

$$\overline{V_n} = V_{(1)} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{12n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \cdot \frac{\left[ 1 + \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2}{\left[ 1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2}}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  получим

$$\overline{V_0} = V_{(1)} \frac{\operatorname{tg}^3 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\left[ 1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \sqrt{1 + \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}}.$$

При данном законе распределения (см. рис. 1) найдем коэффициент разрыхления. Вначале определим объем шарового сектора  $a$ , в котором находятся искомые шары:

$$V = \frac{2}{3} \pi H_1^2 h, \quad (15)$$

где  $h$  – высота шарового сектора, которая равна

$$h = H_1 - H_1 \cos \varphi = H_1 (1 - \cos \varphi) = 2H_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (16)$$

Подставив выражение (16) в (15), получим

$$V = 2\pi H_1^3 (1 - \cos\varphi)/3. \quad (17)$$

Из формулы (2) выразим  $H_1$  и подставим в (17):

$$H_1 = R_1 \frac{1 + \sin\varphi}{\sin\varphi}.$$

Тогда объем шарового сектора, в котором заключены все рассматриваемые шары, образующиеся в нем, будет равен

$$V = \frac{4\pi R_1^3 (1 + \sin\varphi)^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3 \sin^3 \varphi}.$$

Определим величину коэффициента разрыхления породы взрывом, которая заключена в объеме шарового сектора,

$$k_n = \frac{V}{V_n} = \frac{(1 + \sin\varphi)^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[ 1 - \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]}{\sin^3 \varphi \left[ 1 - \operatorname{tg}^{6n} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]}.$$

$$\text{При } n \rightarrow \infty \quad k_0 = \frac{(1 + \sin\varphi)^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[ 1 - \operatorname{tg}^6 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]}{\sin^3 \varphi}.$$

После тригонометрических преобразований получим

$$k_0 = \frac{3 + \sin^2 \varphi}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{3 + \sin^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \quad (18)$$

Проанализируем некоторые частные значения формулы (18). При значении угла  $\varphi = 90^\circ$  (см. рис. 1) получим

$$k_0(90^\circ) = \frac{3 + 1}{2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = 4.$$

Действительно, при значении  $\varphi = 90^\circ$  шаровой сектор превращается в полусферу, объем которой в 4 раза больше вписанной в нее сферы. Далее, при значении угла  $\varphi = 0$ , имеем

$$k_0(0^\circ) = \frac{3}{2}. \quad (19)$$

При стремлении значения угла  $\varphi = 0$  шаровой сектор вырождается в цилиндр и выражение (19) в точности соответствует теореме Архимеда, согласно которой объем цилиндра в  $3/2$  раза больше объема вписанного в него шара.

Несколько усложним задачу и рассмотрим случай, когда между шарами радиусами  $R_1$  и  $R_2$  расположен шар меньшего размера радиусом  $r$ . Определим радиусы шаров  $r$ , расположенных между шарами  $R_1$  и  $R_2$ ;  $R_2$  и  $R_3$  и т. д. (см. рис. 1). Запишем систему уравнений при взаимном касании трех окружностей. Поскольку все три точки касания лежат в одной плоскости, то вместо шаров рассмотрим касание окружностей.

Расположим центры окружностей радиусами  $R_1$  и  $R_2$  на оси  $x$  таким образом, чтобы точка их совместного касания оказалась в начале координат (см. рис. 1). Координаты центра окружности радиусом  $r_1$  обозначим через  $(x; y)$ .

Такое расположение окружностей будет соответствовать следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}(x + R_1)^2 + y^2 &= (R_1 + r_1)^2; \\ (x - R_2)^2 + y^2 &= (R_2 + r_1)^2.\end{aligned}$$

Вычтя из первого уравнения системы второе, находим координату  $x$ :

$$\begin{aligned}(x + R_1)^2 - (x - R_2)^2 &= (R_1 + r_1)^2 - (R_2 + r_1)^2; \\ x &= r_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.\end{aligned}\quad (20)$$

Подставив найденное значение  $x$  в первое уравнение системы, находим  $y$ :

$$y^2 = (R_1 + r_1)^2 - \left( r_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} + R_1 \right)^2 = \frac{(R_1 + r_1)^2 (R_1 + R_2)^2 - [r_1 (R_1 - R_2) + R_1 (R_1 + R_2)]^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

После преобразований получим:

$$y = \frac{2\sqrt{R_1 R_2 r_1 (R_1 + R_2 + r_1)}}{R_1 + R_2}.\quad (21)$$

Составим уравнение кривой, являющейся семейством центров окружностей, которые одновременно касаются окружностей с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ . Из уравнения (20) находим  $r_1$ :

$$r_1 = x \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}\quad (22)$$

и затем вместо  $r_1$  подставим его значение в формулу (21):

$$y = \frac{2}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{x R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{R_1 - R_2} \left[ R_1 + R_2 + x \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2} \right]}.$$

После преобразований находим:



$$y = \frac{2\sqrt{R_1 R_2} [x^2 + (R_1 - R_2)x]}{R_1 - R_2}. \quad (23)$$

Возведя в квадрат выражение (23)

$$y^2 = \frac{4R_1 R_2 [x^2 + (R_1 - R_2)x]}{(R_1 - R_2)},$$

находим:

$$\frac{\left(x + \frac{R_1 - R_2}{2}\right)^2}{\left(\frac{R_1 - R_2}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{R_1 R_2})^2} = 1. \quad (24)$$

Выражение (24) представляет собой уравнение гиперболы.

Определим радиус окружности  $r_1$ , которая касается двух других и образующей конической поверхности. Последняя касается трех окружностей. Из рис. 1 видно, что

$$\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \sin \varphi; \quad (25)$$

$$\frac{R_1 - r_1}{R_1 + r_1} = \sin \gamma; \quad (26)$$

$$\frac{R_2 - r_1}{R_2 + r_1} = \sin \beta; \quad (27)$$

$$l = l_1 + l_2, \quad (28)$$

где  $l = (R_1 + R_2) \cos \varphi; \quad (29)$

$$l_1 = (R_1 + r_1) \cos \gamma; \quad (30)$$

$$l_2 = (R_2 + r_1) \cos \beta. \quad (31)$$

Из формул (25), (26), (27) находим значения для косинусов углов  $\varphi$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ :

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\right)^2} = 2 \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2};$$

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{R_1 - r_1}{R_1 + r_1}\right)^2} = 2 \frac{\sqrt{R_1 r_1}}{R_1 + r_1};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left( \frac{R_2 - r_1}{R_2 + r_1} \right)^2} = 2 \frac{\sqrt{R_2 r_1}}{R_2 + r_1}.$$

После подстановки формул (25)–(31) в выражение (24) получим:

$$\frac{2(R_1 + R_2)\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} = \frac{2(R_1 + r_1)}{R_1 + r_1} + \frac{2(R_2 + r_1)\sqrt{R_2 r_1}}{R_2 + r_1}.$$

После сокращения решаем это уравнение относительно  $r$ :

$$\sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{R_1 r_1} + \sqrt{R_2 r_1},$$

откуда 
$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}. \quad (32)$$

Далее рассмотрим случай, когда вписанная окружность одновременно касается трех окружностей радиусами  $R_1 = R_2$  и  $r_1$  (рис. 2). Как видно из рис. 2,

$$y_1 - y_0 = r_1 + r_0. \quad (33)$$

Значения величин для  $y_1$  и  $y_0$  получим из формулы (21). Так как  $R_1 = R_2$ , то для величин  $y_0$  и  $y_1$  получим выражения

$$y_0 = \sqrt{r_0(2R_1 + r_0)}; \quad (34)$$

$$y_1 = \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)}. \quad (35)$$

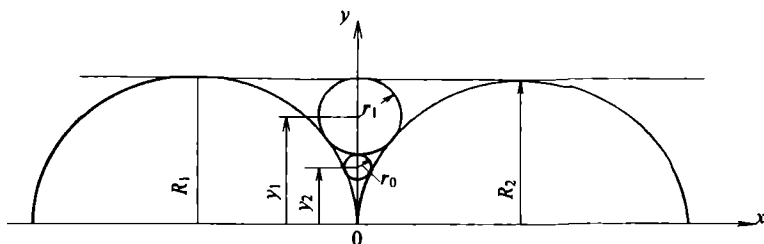


Рис. 2. Расчетная схема при взаимном касании трех окружностей

Подставив формулы (34) и (35) в (33) и решив полученное уравнение относительно  $r_0$ , получим:

$$\sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - \sqrt{r_0(2R_1 + r_0)} = r_1 + r_0; \quad \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1 - r_0 = \sqrt{r_0(2R_1 + r_0)};$$

$$(\sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1)^2 - 2r_0(\sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1) + r_0^2 = r_0^2(2R_1 + r_0);$$

$$2(R_1 + \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1)r_0 = (\sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1)^2; \quad r_0 = \frac{(\sqrt{r_1(2R_1 + r_1)} - r_1)^2}{2(R_1 - r_1 + \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)})}.$$

Выражение для радиуса вписанной окружности:

$$r_0 = r_1 \frac{R_1 + r_1 - \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)}}{R_1 - r_1 + \sqrt{r_1(2R_1 + r_1)}}.$$

Определим максимальные значения углов между двумя образующими конической поверхности, при которых имеет место целочисленное количество вписанных шаров (рис. 3).

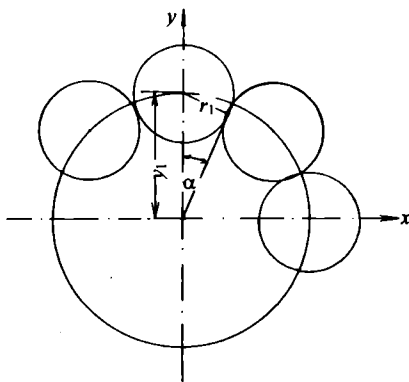


Рис. 3. Схема к определению величин углов конической поверхности тела дробления с целочисленным количеством вписанных шаров радиусом  $r_1$

$$\frac{r_1}{y_1} = \sin \frac{\pi}{k}, \quad (36)$$

где

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}$$

получаем из формулы (32),

$$y = \frac{2\sqrt{R_1 R_2} [x^2 + (R_1 - R_2)x]}{R_1 - R_2}$$

из формулы (23). Подставим в формулу (32) значения для  $R_2$  из формулы (4):

$$r_1 = \frac{R_1^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}}{R_1 + 2R_1 \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} + R_1 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}},$$

откуда

$$r_1 = R_1 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}. \quad (37)$$

Для вычисления  $y_1$  подставим в формулу (21) выражение для  $R_2$  из формулы (4) и для  $R_1$  из формулы (37). В результате получим:

$$y_1 = \frac{2R_1 \sqrt{\frac{(1 - \sin \varphi)^2}{2(1 + \sin \varphi)(1 + \cos \varphi)} \left[ 1 + \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} + \frac{1 - \sin \varphi}{2(1 + \cos \varphi)} \right]}}{R_1 \left( 1 + \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)}.$$

После преобразований получим окончательное выражение для  $y_1$ :

$$y_1 = \frac{R_1(1 - \sin \varphi)(2 + \cos \varphi)}{2(1 + \cos \varphi)}. \quad (38)$$

Теперь подставим значения для  $r_1$  и  $y_1$  из (37) и (38) в условие (36):

$$\sin \frac{\pi}{k} = \frac{1}{2 + \cos \varphi}.$$

Прежде всего, определим промежутки изменения целочисленной величины  $k$  в зависимости от угла  $\varphi$ . Угол  $\varphi$  по условию может изменяться от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ . Следовательно,

$$\frac{1}{3} \leq \sin \frac{\pi}{k} \leq \frac{1}{2}.$$

Для количества шаров  $k$  получим:

$$k = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{2 + \cos \varphi}\right)}.$$

Зависимость количества вписанных шаров от угла  $\varphi$  представлена в табл. 1.

Таблица 1. Зависимость количества шаров в сечении шарового сектора, касающихся его поверхности, от величины угла сектора

$k$	$\varphi^\circ$
9	22,511244
8	52,184126
7	72,255973
6	90,0 (полусфера)

Наконец, рассмотрим предельный случай взаимного расположения двух шаров на границе тела дробления, имеющих радиусы  $R_1$  и  $r_0$  и касающихся его граничных поверхностей (рис. 4)



$$\begin{aligned}
 l_1^2 + 2l_1l_2 + l_2^2 + r_0^2 &= H_1^2 - 2H_1r_0 + r_0^2; \\
 R_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + 4R_1 \sqrt{R_1 r_0} \operatorname{ctg} \varphi + 4R_1 r_0 &= \frac{R_1^2 (1 + \sin \varphi)^2}{\sin^2 \varphi} - \frac{2R_1 r_0 (1 + \sin \varphi)}{\sin \varphi}; \\
 R_1 \cos^2 \varphi + 4\sqrt{R_1 r_0} \sin \varphi \cos \varphi + 4r_0 \sin^2 \varphi &= \\
 = R_1 + 2R_1 \sin \varphi + R_1 \sin^2 \varphi - 2r_0 \sin \varphi - 2r_0 \sin^2 \varphi; \\
 2r_0(1 + 3 \sin \varphi) \sin \varphi + 4\sqrt{R_1 r_0} \sin \varphi \cos \varphi + R_1 (\cos^2 \varphi - 1 - 2 \sin \varphi - \sin^2 \varphi) &= 0; \\
 r_0(1 + 3 \sin \varphi) + 2\sqrt{R_1 r_0} \cos \varphi - R_1(1 + \sin \varphi) &= 0. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Решим уравнение (44) относительно величины  $\sqrt{r_0}$ :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{r_0} &= \sqrt{R_1} \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 + 3 \sin \varphi)(1 + \sin \varphi)} - \cos \varphi}{1 + 3 \sin \varphi} = \\
 &= \sqrt{R_1} \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin \varphi + 3 \sin^2 \varphi + 1} - \cos \varphi}{1 + 3 \sin \varphi} = \\
 &= \sqrt{R_1} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + 2 \sin \varphi + \sin^2 \varphi} - \cos \varphi}{1 + 3 \sin \varphi} = \\
 &= \sqrt{R_1} \frac{\sqrt{2} \sqrt{(1 + \sin \varphi)^2} - \cos \varphi}{1 + 3 \sin \varphi} = \sqrt{R_1} \frac{\sqrt{2}(1 + \sin \varphi) - \cos \varphi}{1 + 3 \sin \varphi}.
 \end{aligned}$$

Из последнего выражения находим

$$r_0 = \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin \varphi) - \cos \varphi]^2}{(1 + 3 \sin \varphi)^2} R_1. \tag{45}$$

Шары с радиусом  $r_0$  расположены в основании шарового сектора с радиусом  $H_1$ . Центр каждого шара  $r_0$  находится на окружности с радиусом  $y_0$ , который можно найти, решив систему двух уравнений, связывающих радиусы окружностей  $R_1$ ,  $r_0$  и  $H_1$ . По теореме Пифагора имеем:

$$\begin{aligned}
 (OM)^2 + (MC)^2 &= (OC)^2; & x_0^2 + y_0^2 &= (H_1 - r_0)^2; \\
 (O_1M)^2 + (MC)^2 &= (O_1C)^2; & [x_0 - (H_1 - R_1)]^2 + y^2 &= (R_1 + r_0)^2.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Решая систему уравнений (46), находим координаты центра окружности с радиусом  $r_0$ , то есть  $(x_0, y_0)$ . Вычтя из первого уравнения системы второе, получим:

$$2x_0(H_1 - R_1) = (H_1 - r_0)^2 + (H_1 - R_1)^2 - (R_1 + r_0)^2.$$

Из этого равенства находим

$$x_0 = \frac{H_1(H_1 - R_1) - r_0(H_1 + R_1)}{H_1 - R_1}. \quad (47)$$

Подставив формулу (47) в первое уравнение системы (46), находим:

$$\begin{aligned} y_0^2 &= (H_1 - r_0)^2 - \frac{[H_1(H_1 - R_1) - r_0(H_1 + R_1)]^2}{(H_1 - R_1)^2} = \\ &= \frac{(H_1 - R_1)^2(H_1 - r_0)^2 - [H_1(H_1 - R_1) - r_0(H_1 + R_1)]^2}{(H_1 - R_1)^2} = \\ &= \frac{[(H_1 - R_1)(H_1 - r_0) + H_1(H_1 - R_1) - r_0(H_1 + R_1)][(H_1 - r_0)(H_1 - R_1) - H_1(H_1 - R_1) + r_0(H_1 + R_1)]}{(H_1 - R_1)^2} = \\ &= \frac{4R_1r_0H_1(H_1 - R_1 - r_0)}{(H_1 - R_1)^2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$y_0 = \frac{2\sqrt{R_1r_0H_1(H_1 - R_1 - r_0)}}{H_1 - R_1}. \quad (48)$$

Выражения для координат центра окружности радиусом  $r_0$  получим, подставив  $H_1$  из (41) в (47) и (48):

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} - R_1 \right) - r_0 \left( R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} + R_1 \right)}{R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} - R_1}; \\ x_0 &= \frac{R_1(1 + \sin \varphi) - r_0 \sin \varphi(1 + 2 \sin \varphi)}{\sin \varphi}; \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2\sqrt{R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} r_0 \left( R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} - R_1 - r_0 \right)}}{R_1 \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi} - R_1}; \\ y_0 &= 2\sqrt{r_0(1 + \sin \varphi)(R_1 - r_0 \sin \varphi)}. \quad (50) \end{aligned}$$

Если в формулы (49) и (50) подставить вместо  $r_0$  его значение из (45), то получим зависимость координат  $x_0$  и  $y_0$  непосредственно от угла раствора конусовидного тела дробления и радиуса куска максимального размера в пределах зоны дробления.

Помимо прочего,  $y_0$  представляет собой радиус окружности, на которой располагаются центры шаров радиусом  $r_0$ , касающихся шаров максимального размера и поверхностей тела дробления. Исходя из условия

$\sin \frac{\pi}{k_0} = \frac{r_0}{r_0}$ , можно найти количество шаров радиуса  $r_0$ , размещающихся в угловых зонах тела дробления. Для определения их количества ( $k_0$ ) необходимо решить тригонометрическое уравнение численными методами:

$$k_0 = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{r_0}{2\sqrt{r_0}(1+\sin\varphi)(R_1-r_0\sin\varphi)}\right)}.$$

Для нахождения коэффициента разрыхления в пределах тела дробления необходимо определить объемы кусков радиусами  $R$ ,  $r$ ,  $r_0$ . Обозначим их соответственно  $V_0$ ,  $v_0$  и  $u$ . Тогда после преобразований получим

$$\sum(V_0 + v_0 + u) = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \left[ \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + n \frac{(1 - \sin\varphi)^3}{8(1 + \cos\varphi)^3} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} + n_0 \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin\varphi) - \cos\varphi]^6}{(1 + 3\sin\varphi)^6} \right] =$$

$$= V_1 \left\{ \frac{(1 + \sin\varphi)^3}{2\sin\varphi(3 + \sin^2\varphi)} \left[ 1 + n \frac{(1 - \sin\varphi)^3}{8(1 + \cos\varphi)^3} \right] + n_0 \frac{(\sqrt{2} - \cos\varphi)^6}{(1 + 3\sin\varphi)^6} \right\};$$

$$\sum(V_0 + v_0 + u) = \frac{4\pi R_1^3}{3(1 + 3\sin\varphi)^3} \left\{ \frac{(1 + \sin\varphi)^3}{2\sin\varphi} \left[ 1 + n \frac{(1 - \sin\varphi)^3}{8(1 + \cos\varphi)^3} \right] + n_0 \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin\varphi) - \cos\varphi]^6}{(1 + 3\sin\varphi)^3} \right\}.$$

Объем шарового сектора

$$V = \frac{4\pi R^3(1 + \sin\varphi)^3(1 - \cos\varphi)}{6\sin^3\varphi}.$$

Тогда коэффициент разрыхления равен

$$k_p = \frac{V}{\sum(V_0 + v_0 + u)}. \quad (51)$$

Определим математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для рассмотренного распределения шаров в объеме шарового сектора. Единичные объемы радиусами  $R$ ,  $r$  и  $r_0$  равны соответственно:

$$V_0 = V_1 \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}; \quad v_0 = nV_1 \frac{(1 - \sin\varphi)^3}{8(1 + \cos\varphi)^3 \left[ 1 - \operatorname{tg}^6\left(\frac{\pi - \varphi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right]};$$

$$u = V_1 n_0 \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin\varphi) - \cos\varphi]^6}{(1 + 3\sin\varphi)^6}.$$

Определим суммы квадратов объемов



$$\sum_{i=1}^{\infty} V_i^2 = V_0^{(2)} = V_1^2 \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right)};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 = v_0^{(2)} = V_1^2 n \frac{(1 - \sin \varphi)^6}{2^6 (1 + \cos \varphi)^6 \left[ 1 - \operatorname{tg}^{12} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) \right]};$$

$$u^2 = V_1^2 \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin \varphi) - \cos \varphi]^{12}}{(1 + 3 \sin \varphi)^{12}}.$$

Математическое ожидание и его квадрат равны:

$$\overline{V_0} = \frac{V_0^2 + v_0^2 + u^2}{V_0 + v_0 + u}; \quad (52)$$

$$\overline{V_0^2} = \frac{(V_0^2 + v_0^2 + u^2)^2}{(V_0 + v_0 + u)^2}.$$

Определим суммы кубов объемов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_i^3 = V_0^{(3)} = V_1^3 \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^{18} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right)};$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i^3 = v_0^{(3)} = V_1^3 n \frac{(1 - \sin \varphi)^9}{2^9 (1 + \cos \varphi)^9 \left[ 1 - \operatorname{tg}^{18} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) \right]};$$

$$u^3 = V_1^3 \frac{[\sqrt{2}(1 + \sin \varphi) - \cos \varphi]^{18}}{(1 + 3 \sin \varphi)^{18}}.$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\overline{V_0} = \sqrt{\frac{V_0^3 + v_0^3 + u^3}{V_0 + v_0 + u} - \frac{(V_0^2 + v_0^2 + u^2)^2}{(V_0 + v_0 + u)^2}}. \quad (53)$$

Таким образом, выражения (51), (52), (53) в наиболее общем виде определяют гранулометрический состав раздробленной взрывом породы в объеме тела дробления.

1. Крысин Р. С., Новинский В. В. Теоретические основы описания кусковатости горной массы посредством коэффициента разрыхления // Вестник Кременчугского государственного университета. – № 4. – 2002.