УДК 622.01:518.12

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ ОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ КРИВОЇ ГРАДУЮВАННЯ РАДІОМЕТРІВ

С. А. Смолянська, інж. (Криворізький технічний університет)

Показана необходимость использования классических многочленов Чебышева дискретного аргумента на неравномерной сетке для задачи средне-квадратического приближения результатов измерений. Предложен эффективный алгоритм аппроксимации градуировочной кривой радиометров с помощью ортогональных функций дискретного аргумента вида $\{x^{m}, x^{-m}\}$.

Одним з шляхів спрямованого формування якості мінеральної сировини є застосування приладів експрес-аналізу, зокрема рудникових радіометрів. На залізорудних родовищах України процентний вміст корисного компонента в мінеральній сировині визначається гама-гама методом за допомогою стаціонарних і переносних рудникових радіометрів, розроблених у проблемно-галузевій науково-дослідній лабораторії Міністерства промислової політики України при Криворізькому технічному університеті. Достовірність результатів геофізичного випробування забезпечується, насамперед, точністю градуювання таких приладів. Донедавна через обмежені можливості застосовуваних технічних засобів крива градуювання апроксимувалася функціями з малим числом параметрів, що не дозволяло забезпечити достатню точність вимірювання [1, 2]. Для сучасних засобів обчислювальної техніки фактор обмеження числа параметрів відходить на другий план, а головними задачами стають точність апроксимації, стійкість і ефективність використовуваних математичних методів.

До класичних методів апроксимації належить метод найменших квадратів (МНК). Однак використання лінійної моделі на базі степеневих поліномів приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення коефіцієнтів цих поліномів [3]. Для розв'язання такої СЛАР з великим числом невідомих були застосовані найбільш ефективні алгоритми: метод Гауса, метод сполучених градієнтів і метод квадратного кореня, але в будь-якому випадку виникала необхідність регуляризації системи за Тихоновим. Проте при степені полінома, більшому за 12, середньоквадратичне відхилення не зменшувалося, що свідчить про неточне рішення СЛАР [3, 4, 5].

У статті викладені результати розробки алгоритму апроксимації кривої градуювання радіометрів, який дозволяє зменшити число коефіцієнтів апроксимуючого полінома за рахунок підбору ортогональних функцій спеціального вигляду без зниження точності наближення.

Градуювання радіометрів полягає в перетворенні інтенсивності розсіяного гама-випромінювання (N, імпульсів/с) у відповідні значення процентного вмісту (q) корисного компонента. Для одержання залежності

$$q = f(N) \tag{1}$$

відбирають репрезентативні проби, для яких за допомогою радіометра визначають значення N_i і методами хімічного аналізу – значення q_i. В результаті отримують низку значень N_i і q_i, за якими необхідно підібрати оптимальну залежність для наближення (1), знаючи тільки, що це монотонно спадна функція (рис. 1).

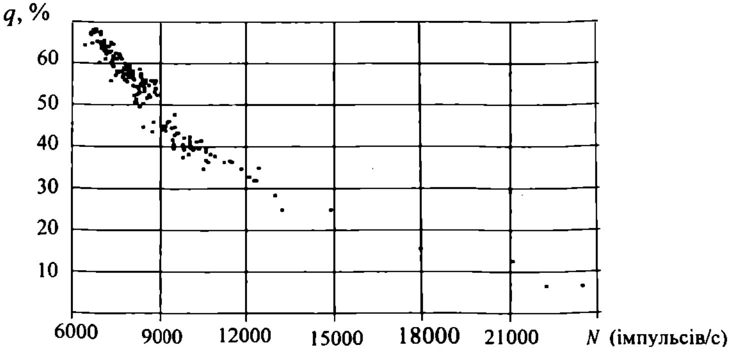

Рис. 1. Залежність вмісту корисного компонента q від інтенсивності розсіяного гама-випромінювання N у 183 пробах

Для визначення вигляду залежності (1) і відповідних коефіцієнтів поліномів була запропонована лінійна модель на базі степеневих функцій $\{N^j\}$, де $j = -m_1, m_2$. Рішення розглядати від'ємні степені j було прийняте, виходячи з вигляду кривої (1). Таким чином, розв'язувалася задача мінімізації функції Φ за p експериментальними точками:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p}\left(q_i - \sum_{j=-m1}^{m2} a_j N^j\right)^2. \tag{2}$$

Згідно з МНК, невідомі величини a_j повинні задовольняти системі з $m = m_2 + m_1 + 1$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0, \qquad k = \overline{1, m}. \tag{3}$$

Розв'язання системи (3) для числа невідомих, що перевищує 10–12, є складною обчислювальною задачею. Навіть при використанні регуляризації системи (3) за Тихоновим із збільшенням m починає зростати і величина Φ [4]. Крім того, із збільшенням степеня багаточлена m система (3) змінюється і необхідно викону-вати нове обчислення всіх коефіцієнтів a_j. Цих недоліків можна уникнути, якщо скористатися методом Чебишева [5]. В цьому випадку вираз (2) можна подати у вигляді

$$\Phi=\sum_{i=1}^{p}\left[q_i-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi_j(N_i)\right]^2,$$

де p – число точок вимірювання; m – кількість багаточленів $\{\varphi_j(N_i)\}$, які входять до лінійної комбінації, що наближує результат вимірювань.

За функції $\{\varphi_j(N_i)\}$ доцільно обрати систему ортогональних функцій у розумінні скалярного добутку дискретного аргументу:

$$(\varphi_k,\varphi_l)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(N_i)\cdot\varphi_l(N_i). \qquad (4)$$

Іншими словами, система ортогональних функцій задовольняє умовам:

$$b_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\varphi_k(N_i)\cdot\varphi_l(N_i)=\begin{cases}=0 & \text{при } k\neq l\\ \neq 0 & \text{при } k=l\end{cases}.$$

Якщо обрати систему ортогональних функцій у розумінні (4), то система (3) стає діагональною і легко розв'язується:

$$\alpha_k=\sum_{i=1}^{p}q_i\ \varphi_k(N_i)\Big/\sum_{i=1}^{p}\varphi_k^2(N_i).$$

Залишається знайти вирази для ортогональних багаточленів Чебишева на заданих точках N_i на нерівномірній сітці. Якщо обрати

$$\varphi_1(N)=1,\ \ \varphi_2(N)=N+a_2,\ \text{ де }\ a_2=-\sum_{i=1}^{p}N_i\Big/p, \qquad (5)$$

то для $k>1$ $\varphi_{k+1}(N)$ обчислюються за рекурентною формулою [5]:

$$\varphi_{k+1}(N)=(N+\beta_{k+1})\varphi_k(N)+\gamma_{k+1}\varphi_{k-1}(N), \qquad (6)$$

де

$$\beta_{k+1}=-\sum_{i=1}^{p}N_i\,\varphi_k^2(N_i)\Big/\sum_{i=1}^{p}\varphi_k^2(N_i);$$

$$\gamma_{k+1}=-\sum_{i=1}^{p}N_i\,\varphi_{k-1}(N_i)\varphi_k(N_i)\Big/\sum_{i=1}^{p}\varphi_{k-1}^2(N_i).$$

Залежність, зображена на рис. 1, близька до $1/x$ і повинна особливо зручно (при мінімальному степені m) апроксимуватися функціями вигляду $y=1/x^k$, де $k=0,1,2,\dots$. Тому спробуємо поширити формули (5, 6) на систему функцій $\{1/x^k\}$. Іншими словами, побудуємо ортогональну систему функцій у розумінні скалярного добутку (4) на базі лінійної незалежної системи функцій $\{1, x, 1/x, x^2, 1/x^2, \dots\}$.

Для початку ітераційного процесу скористаємося виразами (5), де $a_2\neq 0$, оскільки завжди $N_i>0$. Рекурентну формулу (6) перепишемо у вигляді

$$\varphi_{k+1}(N)=(1/N+\beta_{k+1})\varphi_k(N)+\gamma_{k+1}\varphi_{k-1}(N).$$

Коефіцієнт β_{k+1} обираємо з умови $(\varphi_{k+1},\varphi_k)=0$:

$$(\varphi_{k+1},\varphi_k)=\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{N_i}+\beta_{k+1}\right)\varphi_k^2(N_i)+\gamma_k\sum_{i=0}^{p}\varphi_{k-1}(N_i)\varphi_k(N_i)=0.$$

Оскільки φ_{k-1} і φ_k ортогональні, то $\sum_{i=0}^{p}\varphi_{k-1}(N_i)\varphi_k(N_i)=0$. Тому

$$\beta_{k+1}=-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_k^2(N_i)}{N_i}\Bigg/\sum_{i=1}^{p}\varphi_k^2(N_i).$$

Тепер з умови $(\varphi_{k+1}, \varphi_{k-1}) = 0$ визначимо коефіцієнт γ_{k+1}:

$$(\varphi_{k+1},\varphi_{k-1})=\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_{k-1}(N_i)}{N_i}+\beta_{k+1}\sum_{i=1}^{p}\varphi_{k-1}(N_i)\varphi_k(N_i)+\sum_{i=1}^{p}\varphi_{k-1}^2(N_i)=0;$$

$$\gamma_{k+1}=-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_{k-1}(N_i)}{N_i}\Bigg/\sum_{i=1}^{p}\varphi_{k-1}^2(N_i).$$

Аналогічно доводиться, що $(\varphi_r, \varphi_{k+1}) = 0$ при $r < k - 1$ [5]. Таким чином, отримуємо систему ортогональних функцій дискретного аргументу, подібну багаточленам Чебишева. Перевірка на ортогональність для побудованих функцій виконувалась для $m = 25$ шляхом перевірки співвідношень (4) для $k, l = \overline{1,m}$. При цьому завжди виконувалась умова $|b_{kl}| < 10^{-12}$ при $k \neq l$, що свідчить про ефективність алгоритму побудови ортогональних функцій у розумінні скалярного добутку (4). Результати обчислювальних експериментів, отримані при наближенні даних (див. рис. 1) у випадку, коли $p = 183$ точок, наведені на рис. 2 і 3. З них випливає, що при $m > 11$ ортогональні функції дискретного аргументу є більш ефективним методом середньоквадратичного наближення результатів експерименту порівняно з класичним МНК, а ортогональні функції навіть при $m > 20$ забезпечують більш високу точність, ніж багаточлени Чебишева.

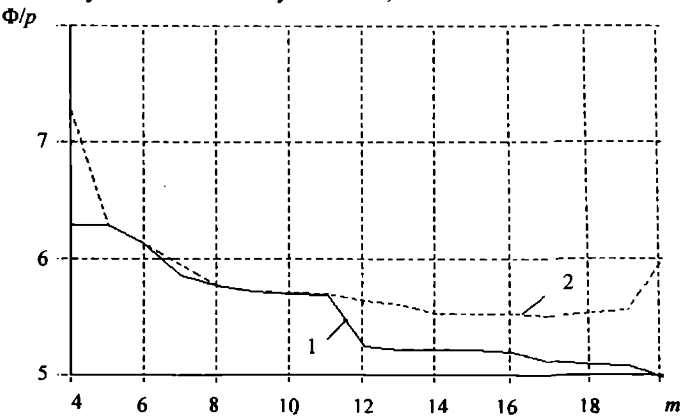

Рис. 2. Залежність середньоквадратичного відхилення Φ/p від степеня багаточлена m при наближенні $q = f(N)$: *1* – багаточленами Чебишева; *2* – методом найменших квадратів

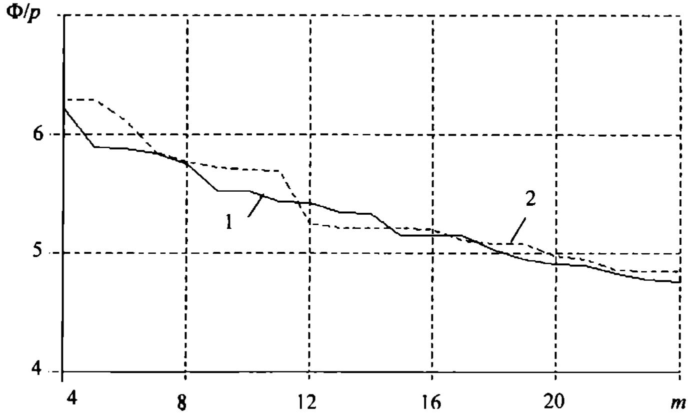

Рис. 3. Залежність середньоквадратичного відхилення Φ/p від степеня багаточлена m при наближенні $q = f(N)$: *1* – ортогональними функціями $\{x^m, x^{-m}\}$; *2* – багаточленами Чебишева

Таким чином, для одержання кривої градуювання радіометрів система ортогональних функцій дискретного аргументу виду $\{x^m, x^{-m}\}$ є більш ефективним методом апроксимації, ніж багаточлени Чебишева і МНК. Запропонований алгоритм належить до "жорстких" алгоритмів, які не передбачають адаптацію до зміни зовнішніх умов. У перспективі програмне забезпечення радіометрів може містити кілька методів апроксимації і здійснювати автоматичний вибір методу, оптимального для застосування в конкретних умовах експлуатації.

1. *Арцыбашев В. А.* Ядерно-геофизическая разведка: Учебное пособие для вузов. 2-е изд. – М.: Атомиздат, 1980. – 321 с.

2. *Азарян А. А., Василенко В. Е., Лисовой Г. Н., Зубкевич В. Ю.* Контроль качества железной руды на конвейере // Матер. II Межд. симпозиума "Оперативный контроль и управление качеством минерального сырья при добыче и переработке" (Качество-99). – Ялта. – 1999. – С.143–149.

3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

4. *Смолянская С. А.* Повышение точности градуировки радиометров при оперативном контроле качества минерального сырья // Матер. III-ї Всеукраїнської конф. молодих науковців "Інформаційні технології в науці, освіті і техніці" (ІТОНТ-2002). – Черкаси. – 2002. – С. 258–260.

5. *Гутер Р. С., Овчинский Б. В.* Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 432 с.