УДК 539.3

ДИНАМИКА УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК (ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ПРОБЛЕМЫ)

Н. А. Лысюк, канд. техн. наук (ННИИОТ)

Наведено результати ретроспективного аналізу розрахункових схем динамічного впливу рухомих навантажень на пружні конструкції широкого застосування. Виконано огляд розв'язків задач переважно класу стаціонарних для різноманітних задач практичного характеру.

Задачи теоретического исследовании динамики балочных и оболочечных конструкций под действием подвижных сосредоточенных сил и распределенных нагрузок возникают во всех отраслях техники, в том числе в геологоразведочной, нефте-, газо- и горнодобывающей отраслях (конструкции скважин, внутрискважинное и наземное оборудование). Действующие на эти конструкции подвижные нагрузки могут генерироваться силами тяжести бурового оборудования, полями давления акустических волн на пласты, эффектами детонации взрывчатых веществ, ударными волнами технологических или аварийных взрывов и т.п. Актуальность постановки задачи и решения отмеченных задач обусловлена возрастающим увеличением скоростей перемещения подвижных нагрузок и стремлением к уменьшению масс несущих их конструкций. Как отмечено в монографии [1], одной из первых причин, побудивших инженеров к постановке теоретических и экспериментальных задач по исследованию динамического воздействия подвижных возмущений на сооружения, явилось разрушение Честерского моста в Англии в 1847 году, сопровождаемое человеческими жертвами. Оно побудило инженеров-строителей более активно заняться исследованием вопросов о влиянии подвижных нагрузок на прогибы и внутренние усилия в упругих конструкциях и установить, насколько динамические значения этих функций отличаются от их величин в условиях статического приложения нагрузки.

При изучении взаимодействия тонкостенных конструкций с движущимися телами или массами можно выделить задачи стационарного взаимодействия безынерционных и инерционных нагрузок со стержнями, пластинами и оболочками, нестационарного деформирования конструкций под действием движущихся масс [2]. В работах, посвященных исследованию установившихся процессов при действии подвижных нагрузок на конструкции весьма большой протяженности, предметом изучения являются критические скорости, соответствующие статическим и динамическим потерям устойчивости системы [1, 3, 4]. В нестационарных задачах изучается напряженно-деформированное состояние конструкции, по которой в течение ограниченного промежутка времени движутся сосредоточенные массы, вызывая локальное поверхностное нагружение несущего сооружения [1, 2, 5, 6].

В связи с тем, что в настоящей работе предпринята попытка уточнения постановки задачи о взаимодействии движущихся тел с упругими конструкциями, рассмотрим подробнее историю этого вопроса [1, 3].

Одним из первых результатов в этом направлении был вывод Х. Кокса о том, что при действии подвижной силы на шарнирно опертую балку значения определяющих функций должны в два раза превышать значения функций, обусловленных статическим приложением соответствующей силы. При обосновании этого результата Х. Кокс в 1848 году рассмотрел движение силы P по балке длиной l с изгибной жесткостью EJ. Он полагал, что к тому моменту, когда сила достигнет середины пролета, прогиб f балки будет максимальным и работа силы составит Pf. В этом состоянии потенциальная энергия изгиба балки достигнет величины $\Pi = 48EJf^2/2l^3$. Приравняв эти величины, Х. Кокс установил, что $f = Pl^3/24EJ$. Это значение в два раза превышает прогиб при статическом приложении силы $f_{см} = Pl^3/48EJ$. Ошибочность этих рассуждений (даже в условиях игнорирования инерционных свойств груза и балки) становится очевидной хотя бы из того факта, что найденный динамический прогиб f не зависит от скорости V движения силы P, хотя при бесконечно малой V значения f и $f_{см}$ должны приближаться друг к другу.

Ошибка Х. Кокса заключается в том, что, во-первых, он полагал одинаковыми формы статического и динамического изгибания балки и, во-вторых, на что обратил внимание Дж. Стокс в 1849 году, Х. Кокс не учел работу горизонтальных сил, затрачиваемых на передвижение груза по балке.

Позже было рассмотрено четыре схемы учета инерционных свойств динамической системы, составленной из упругой балки и подвижного груза. В первой схеме инерционными свойствами как груза, так и балки пренебрегают и считают, что сила давления груза на балку постоянна и равна его тяжести. Принятое предположение эквивалентно условию статического приложения силы P на разных расстояниях Vt от левой опоры, а сформированная постановка задачи привела к разработке методики исследования, связанной с построением широко известных в настоящее время в строительной механике линий влияния. Начало этой методики положили в 1868 году Э. Винклер и О. Мор.

В соответствии со второй схемой масса упруго-деформируемой балки считается равной нулю, а давление P груза отличается от статического и определяется соотношением

$$P = mg - m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - m\frac{d^2y}{dx^2}V^2, \tag{1}$$

где y – прогиб балки под грузом; m – масса груза; V – скорость; t – время.

Продолжая исторический обзор дальше, здесь лишь попутно отметим, что использование при выводе соотношения (1) равенство для вертикального ускорения

$$\frac{d^2g}{dt^2} = V^2\frac{d^2y}{dx^2} \tag{2}$$

не совсем корректно, поскольку в нем оказались потерянными важные слагаемые. На уточнении выражения (2) и силы P (1) остановимся ниже; здесь поясним только суть ошибки. Для этого обратим внимание на тот факт, что координата y расположения груза на вертикали при движении его вдоль балки является функцией и координаты x положения груза на балке, и времени t. Координата x также является функцией t, поэтому $y = y[x(t), t] = y(Vt, t)$.

В связи с этим при вычислении вертикальной составляющей груза dy/dt необходимо учитывать, что она равна

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{y} + y'V$$

и складывается из двух компонент, характеризующих скорость $\dot{y}$ точки балки, в которой находится груз, и скорость y' изменения координаты y балки, обусловленную перемещением груза в соседнюю точку балки с другим прогибом. Отметим, что аналогичный способ вычисления полной производной применяется и в теории поля, где оператор d/dt носит название субстанциональной производной по времени, d/dt – оператор локальной производной, а слагаемое $y'V$ связывают с конвективным изменением полевой величины.

Таким же образом вычисляется и вертикальная составляющая полного ускорения груза

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} V^2 .$$

Видно, что это выражение заметно отличается от (2).

Полагая, что сила взаимодействия между грузом и невесомой балкой определяется в виде (1) и она является единственно активной нагрузкой, Ф. Виллис в 1849 году установил, что прогиб под грузом

$$y = \frac{Px^2 (l - x)^2}{3lEJ}, \tag{3}$$

где l – пролет балки; $x = Vt$.

Поскольку входящая в (3) сила P неизвестна, после исключения ее в (3) с помощью (1) строится дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3lEJ}{mV^2 (lx - x^2)^2} y = \frac{g}{V^2}. \tag{4}$$

Его решение в виде алгебраического ряда получено Дж. Стоксом. С его помощью в первом приближении найдено значение коэффициента динамичности (отношение значения максимального динамического прогиба к соответствующему статическому прогибу)

$$\mu = 1 + \frac{ml}{3EJ} V^2 .$$

При такой постановке задачи динамическое поведение упругой системы уже зависит от скорости V, хотя, как отмечено выше, равенство (2), а потому и (1), не совсем корректно.

В третьей схеме принимается, что динамический эффект в системе связан с учетом инерционных свойств балки, по которой движется неизменяющаяся сила P. В такой постановке эта задача рассматривалась во многих работах, начиная с публикаций А. Н. Крылова в 1905 году. Позже она изучалась А. П. Филипповым [6]. На основе теории балок С. П. Тимошенко эта система исследована в [2].

Наиболее сложная ситуация возникает при постановке задачи по четвертой схеме, в которой учитываются инерционные свойства как груза, так и балки. Первые исследования этой задачи были выполнены еще в конце прошлого века. В 30-е годы XX-го столетия были получены ее решения в виде рядов. И хотя было использовано не совсем корректное представление силы взаимодействия P в форме (1), удалось получить важный вывод о том, что если скорость движения груза V велика и статическая постановка задачи недопустима, то, как правило, влияние сил инерции сооружения и груза имеют одинаковый порядок. К такому результату пришел Ю. М. Майзель [7, 8]. В подобной постановке эту задачу рассматривал В. В. Белоконь [9].

Если движущийся по упругой конструкции груз моделируется точечной массой, а усилия взаимодействия – сосредоточенной силой, то реализация методики решения, базирующейся на применении разложения разрешающих функций в ряды, оказывается сопряженной со значительными трудностями, вызванными необходимостью учета большого числа членов ряда. Поскольку в этом случае решение оказывается разрывным, а сам разрыв движется, то для анализа динамического поведения системы более рациональным может стать способ, базирующийся на условном расчленении упругой системы на составные части в местах приложения подвижных нагрузок и выделении движущихся тел с последующим определением неизвестных сил их взаимодействия.

Если упругая конструкция имеет весьма большую протяженность (колонна обсадных или бурильных труб), то возможна постановка задачи о стационарном движении груза, когда скорость V движения постоянна и в системе координат, движущейся вместе с телом, устанавливается стационарная форма прогибов. Тогда ускорение тела становится равным нулю, а сила взаимодействия тела и упругой системы равна силе тяжести груза. В таких задачах инерционные свойства тела роли не играют и при их решении находятся формы движения конструкции, параметры напряженно-деформированного состояния и значения критических скоростей движения тела.

В. Л. Бидерман [4] одним из первых рассмотрел случай, когда груз силой тяжести P равномерно движется со скоростью V вдоль бесконечной прямолинейной балки, лежащей на сплошном однородном упругом основании. Отличительной особенностью этой задачи является возможность стационарного режима движения, при котором прогиб под грузом все время остается постоянным и груз движется по горизонтали. Поэтому для наблюдателя, движущегося вместе с грузом, форма динамического изгибания балки будет выглядеть все время одинаково. Поскольку вертикальная координата груза остается неизменной, то вертикальное ускорение груза равно нулю, а давление груза на балку равно силе тяжести груза P.

Используя модель балки Кирхгофа (или Эйлера–Бернулли), В. Л. Бидерман нашел критические значения скорости перемещения груза и форму динамического изгибания балки, представляющую собой бегущую волну. Однако построенное им решение имеет два недостатка. Первый связан с тем, что в решение вкралась неточность и в знаменателях аналитических выражений для искомых констант интегрирования и функции прогиба вместо четверки написана двойка. Эта неточность повторена, к сожалению, и в выдержавшей большое число переизданий на иностранные языки в других странах книге [1].

Второй недостаток рассматриваемого решения обусловлен постановкой задачи. Дело в том, что теории стержней (балок), пластин и оболочек, базирующиеся на гипотезах Кирхгофа, неудовлетворительно описывают бегущие изгибные волны, для которых учет инерции поворота сечения и деформаций сдвига оказывается существенным. Поэтому задачи о распространении изгибных волн в балках и оболочках должны основываться на уточненных теориях, учитывающих эти факторы (в частности на теории С. П. Тимошенко). Как показано в нашей работе, применение теории С. П. Тимошенко для постановки обсуждаемой задачи позволило не только количественно, но и качественно уточнить ее решение. Так, оказалось, что для балки на упругом основании имеется не одна критическая скорость (как это установлено В. Л. Бидерманом на базе теории Кирхгофа), а три. Причем одна из этих скоростей зависит от коэффициента постели основания, а две другие (равные скоростям распространения сдвиговых и продольных волн в стержнях) – не зависят.

Большой цикл работ посвящен другим вопросам динамики балок под действием подвижных нагрузок. Так, В. Г. Вальке [10] решил конкретную задачу о взаимодействии катящегося колеса с балкой на упругом основании. Д. В. Вольпер, А. Б. Моргаевский [11], А. Б. Моргаевский и И. Ф. Кожемякина [12] рассматривали необходимость учета инерции поворота и деформаций сдвига балки. А. Г. Гальченко и С. Н. Конашенко [13] рассмотрели задачу о движении системы грузов и груза с пульсирующей силой. Аналогичная задача поставлена В. И. Грицюком [14] для системы двух грузов, соединенных рессорой. Н. А. Колесник [15] исследовал динамику арочных систем под действием подвижных нагрузок. Ю. М. Майзель [7, 8] проводил теоретические и экспериментальные исследования динамики балок на упругом основании под действием подвижных нагрузок. Г. Б. Муравский [16] анализировал влияние одностороннего характера работы упругого основания под балкой, В. Н. Пожуев [17] применял полученные им решения для оценки механики шахтных рельсовых путей.

Среди ученых дальнего зарубежья R.S. Ayre, L.S. Jacobson, C.S. Ysu [18] изучали динамику двухпролетной балки под действием подвижной нагрузки,

R. Parnes [19] исследовал колебания и дисперсионные соотношения для стержня, заглубленного в упругую среду.

Обширная научная литература посвящена вопросам действия подвижных нагрузок на упругие полупространства, среды, пластины и оболочки. Анализ работ о распространении свободных волн (собственных колебаний) в системах оболочка–сплошная линейная инерционная среда, а также о стационарном деформировании такого рода систем, вызванном подвижными безмассовыми нагрузками, дан в обзорной работе А. Г. Горшкова и В. Н. Пожуева [20]. В ней отмечены и близкие к данным вопросам задачи динамической устойчивости и вынужденных колебаний, исследования движения нагрузок и штампов вдоль цилиндрических полостей в упругом пространстве, а также ряд смежных проблем. При этом основное внимание уделено аналитическим методам решения, вопросам использования для систем без диссипации энергии дисперсионных кривых, а также вопросам определения резонансных (критических) скоростей движения нагрузок. Выделены работы для конструкций с односторонними связями и неоднородных оснований.

Динамическое поведение упругого полупространства, полуплоскости, упругих слоев и других пространственных упругих систем при действии движущихся сосредоточенных и распределенных сил, нагрузок и штампов исследовано в работах [21–30] ученых стран СНГ и в работах [31–33] ученых стран Западной Европы и Америки.

Ими изучены параметры напряженно-деформированного состояния, формы движения и найдены значения критических скоростей с учетом упругих и инерционных свойств этих сред, их ортотропии и анизотропии, многослойности и неоднородности, а также наличия условий предварительного напряжения и деформирования.

Публикации [34–44] посвящены задачам динамики упругого массива в окрестности цилиндрической полости. Считается, что полость может быть полностью заглублена в упругую среду или находиться в зоне ее свободной поверхности. Рассмотренные вопросы изучаются применительно к подземным туннелям [34, 45, 46], подземным цилиндрическим сооружениям [36], заглубленным газопроводам и трубопроводам [47], цилиндрическим оболочкам, помещенным в жидкость [41, 48, 49]. В качестве окружающей среды выбраны упругие изотропные и анизотропные среды, жесткие обоймы и жидкость. Считается, что полости и трубопроводы могут быть нагруженными подвижными нагрузками, перемещающимися с дозвуковой и сверхзвуковой скоростью, движущимися штампами, скручивающей нагрузкой, пульсирующей и гармонической нагрузкой, взрывными волнами. Нагрузка может быть приложена как к внутренней полости, так и к свободной поверхности полупространства. В результате построения решений найдены значения критических скоростей движения нагрузки и параметры динамического напряженно-деформированного состояния среды и обделки туннелей.

Вопросы динамического поведения пластин на упругом основании под действием подвижных нагрузок освещены в статьях авторов из стран СНГ [20, 28, 50–53] и стран Запада [54]. Рассмотрены случаи опирания пластин на предварительно напряженную упругую среду [28], на среду с переменными параметрами [55], упругий неоднородный слой [56], изучена динамика пластин и ледяного покрова на поверхности жидкости [51, 53, 57]. Исследовано действие периодической нагрузки [4], плоского фронта давления [53], а также точечного подвижного источника на ледяной покров [5].

Наиболее обширная научная литература посвящена задачам динамики оболочек, подвергающихся действию подвижных нагрузок. В работах [58–61] исследованы волноводные свойства упругих полых цилиндров и однослойных и многослойных цилиндрических оболочек. Динамика однослойных цилиндрических оболочек при действии подвижных нагрузок отражена в [62, 63].

Действие подвижных нагрузок на оболочки с упругим заполнителем изучено в статьях [64, 65], на оболочки с жидкостью – в работах [66, 67]. Результаты расчета многослойных оболочек под действием подвижных нагрузок отражены в публикациях [68, 69]. Задача о резонансном взаимодействии оболочки с бегущей нагрузкой поставлена и решена в [70], действие скручивающей подвижной нагрузки исследовано в [71]. Вопросы динамики магистральных трубопроводов решаются известными методами теории цилиндрических оболочек с подвижными нагрузками.

Из зарубежных ученых S. Chonan изучал движение нагрузки по двухслойной цилиндрической оболочке с несовершенными связями, R. M. Cooper и P. M. Naghdi – распространение неосесимметричных волн в упругих цилиндрических оболочках, S. K. Datta, T. Chakraborty, A. H. Shan [72] – динамическую реакцию трубопроводов на подвижную нагрузку применительно к трубопроводам. Особо выделим работу P. M. Naghdi и R. M. Cooper, которые исследовали распространение упругих волн в цилиндрических оболочках с учетом эффектов поперечного сдвига и инерции поворота.

Завершая обзор работ по динамике упругих конструкций под действием подвижных нагрузок, отметим, что выполненные исследования относятся в основном к классу стационарных задач, в которых переход к амплитудам периодических функций или к подвижным системам координат с помощью введения фазовых функций позволяют понизить размерность задачи. При этом исключается из рассмотрения одна из координат (обычно время), а характеристики динамического процесса, такие как скорость распространения свободных волн, частота колебаний (собственных или вынужденных), скорость движения нагрузки, входят в уравнение задачи и в ее решения как параметр. Такие постановки задач исключают из рассмотрения переходные процессы, которые возникают в моменты приложения нагрузок и изменения их интенсивности. Поэтому рассмотренные постановки стационарных задач при действии подвижных нагрузок и получаемые при таких подходах решения могут рассматриваться как предельные для нестационарных задач с некоторыми начальными условиями и при очень больших значениях времени. В то же время задачи о свободных колебаниях и распространении свободных волн являются стационарными по своей природе, поскольку искомыми являются частоты, периоды, фазовые скорости и формы движения.

1. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1967. – 420 с.

2. *Кохманюк С. С., Янютин Е. Г., Романенко Л. Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – К.: Наук. думка, 1980. – 231 с.

3. *Пановко Я. Г., Коловский М. З.* Колебания в механических системах // Развитие общей механики в России и Украине в 20–80-е годы XX века. М.: Наука, К.: Феникс. – 1998. – С. 211–232.

4. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев И. И. И др.* Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1952.

5. *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 336 с.

6. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. – К.: Наук. думка, 1965. – 716 с.

7. *Майзель Ю. М.* О значении динамического коэффициента для балок при действии подвижной нагрузки // Научн. тр. Днепропетр. металлург. ин-та. – 1958. – Вып. 34.

8. *Майзель Ю. М.* Экспериментальное исследование колебаний балок при движении сосредоточенного груза // Научн. тр. Днепропетр. металлург. ин-та. – 1959. – Вып. 41. – С. 83–89.

9. *Белоконь В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 173 с.

10. *Вильке В. Г.* О качении жесткого колеса по деформируемому рельсу. – ПММ, Т. 59. – 1995. – № 3. – С. 512–517.

11. *Вольпер Д. Б., Моргаевский А. Б.* О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения // Исслед. по теории сооружений. – 1963. – Вып. 12. – С. 75–83.

12. *Моргаевский А. Б., Кожемякина И. Ф.* Решение задачи о динамическом воздействии подвижной нагрузки с учетом сдвига и инерции вращения // Динамика и прочность машин. – 1976. – Вып. 23. – С. 23–27.

13. *Гальченко А. Г., Конашенко С. И.* О колебаниях балки при движениях по ней группы грузов и груза с пульсирующей силой // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж-д трансп.– 1963. – Вып. 44. – С. 145–149.

14. *Грицюк В. И.* О динамическом воздействии на балки системы двух грузов, соединенных рессорой // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1975. – № 8. – С. 42–45.

15. *Колесник И. А.* Колебания комбинированных арочных систем под действием подвижных нагрузок. – Донецк: Вища школа, 1977. – 152 с.

16. *Муравский Г. Б.* Действие подвижной нагрузки на балку, лежащую на одностороннем упругом основании // Строит. механика и расчет сооруж. – 1975. – № 1. – С. 42–49.

17. *Пожуев В. И.* Движущиеся пульсирующие нагрузки в цилиндрической оболочке в упругой среде // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск, 1975. – № 2. – С. 187–197.

18. *Ayre R. S., Jacobson L. S., Hsu C. S.* Transverse vibration of one and of two-span beams under the action of a moving mass load. // Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (June 11–16, 1951, Chicago). New York; ASME. – 1952. – P. 80–91.

19. *Parnes R.* Dispersion relations of waves in a rod embedded in an elastic medium. – J. Sound and Vibr. – 1981, 76. – № 1. – P. 65–75.

20. *Горшков А. Г., Пожуев В. И.* Стационарная задача динамики для пластин и оболочек, взаимодействующих с инерционными средами // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мех. деформируем. тверд. тела. – 1989, 20. – С. 3–41.

21. *Амандосов А. А., Нуржумаев О., Сабодаш П. Ф.* Поведение полупространства, на границе которого действуют подвижные нагрузки // Тр. ин-та мат. и мех. АН КазССР. – 1971. – № 2. – С. 136–151.

22. *Апикян Ж. Г.* Движение жесткого штампа на упругой полуплоскости со сверхзвуковой скоростью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1970, 23. – № 5. – С. 31–36.

23. *Артиков Т. У., Саатов Я. У., Расулов М. К.* Поведение неоднородного упругого слоя при воздействии на него подвижной нагрузки // Тр. Ташкент. политехн. ин-та. – 1972. – № 76. – С. 186–188.

24. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. мех. – 1986, 22. – № 9. – С. 8–15.

25. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Гузь А. Н.* К решению задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство с начальными напряжениями // Прикл. мех. – 1988, 24. – № 8. – С. 55–60.

26. *Белоконь А. В.* Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // Прикл. мех. и мат. – 1982, 46. – № 2. – С. 296–302.

27. *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* Распространение волн в изотропной жестко-защемленной упругой полосе от движущихся осциллирующих нагрузок // Прикл. мех. – 1986, 22. – № 9. – С. 90–97.

28. *Глухов Ю. П.* К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве // Прикл. мех. – 1986, 22. – № 10. – С. 57–62.

29. *Ильман В. М., Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Действие подвижной нагрузки на многослойное основание // Гидроаэромех. и теория упругости. – Днепропетровск, 1985. – № 33. – С. 80–86.

30. *Приварников А. К., Филимонов Р. П.* Действие подвижной нагрузки на инерционное многослойное основание // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск, 1985. – С. 3–9.

31. *Adams G. G.* Moving loads on elastic strips with one-sided constraints. – Int. J. Eng. Sci. – 1976. – 14. – № 12. – 1071–1083. – РЖ Механика. – 1977 – 7В240.

32. *Adams G. G.* Steady solutions for a moving load on an elastic strip resting on an elastic half plane. – Int. J. Solids and Struct. – 1979, 15. – № 11. – P. 885–897.

33. *Scott R. A.* Line loads moving on the surface of an inhomogeneous elastic half-space. – Appl. Sci. Res. – 1969, 21. – № 5. – P. 356–365.

34. *Алексеева Л. А., Украинец В. Н.* Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1987. – № 4. – С. 156–161.

35. *Апикян Ж. Г.* Движение жесткого штампа в цилиндрической полости в упругой среде со сверхзвуковой скоростью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1973, 26. – № 4. – С. 39–48.

36. *Дубинкин М. В.* О динамическом расчете подземных цилиндрических сооружений под действием взрывной волны // Научн. тр. Моск. ин-та радиоэлектроники и горн. электромеханики. – 1964. – № 37. – С. 151–158.

37. *Жубаев Н. Ж., Кулахметова Ш. А., Утембаев Н. А.* Напряженное состояние упругого массива при действии подвижной стационарной нагрузки внутри цилиндрической полости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – № 3. – С. 33–40.

38. *Кожабеков Ж. Т.* Напряженное состояние бесконечной упругой среды при действии динамического штампа внутри цилиндрической полости // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – № 5. – С. 62–72.

39. *Никитин И. С.* Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1984. – № 3. – С. 93–99.

40. *Пожуев В. И.* Реакция системы цилиндрическая оболочка – упругая среда на действие подвижной нагрузки // Строит. мех. и расчет сооруж. – 1981. – № 6. – С. 61–64.

41. *Пожуев В. И.* Стационарная реакция трехслойной цилиндрической оболочки в жидкости на действие подвижной волны нормального давления // Пробл. машиностр. – К., 1986. – № 25. – С. 73–78.

42. *Matsuoka K., Nomachi S.* Propagation of flexural stress waves of a cylinder embedded in an elastic medium. – Trans. Jap. Soc. Civ. Eng. – 1978. – № 9. – P. 14–15.

43. *Paplinski A., Wlodarczyk E.* Stress and displacement fields generated by a distributed load, moving with a constant, underseismic velocity along the cylindrical bore in the isotropic elastic medium. – J. Techn. Phys. – 1980, 21. – № 2. – P. 225–243.

44. *Parnes R.* Progressing torsional loads along a bore in an elastic medium. – Int. J. Solids and Struct. – 1980, 16. – № 7. – P. 653–670.

45. *Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А., Украинец В. Н.* Задача о движущейся нагрузке в круговом туннеле в упругом полупространстве // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – Алма-Ата, 1985. – 12 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 26 июня 1985 г. № 5441-85 Деп.)

46. *Айталиев Ш. М., Алексеева Л. А., Украинец В. Н.* Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого заложения при действии подвижных нагрузок // Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат. – 1986. – № 5. – С. 75–80.

47. *Киясбейли Т. Н., Латифов Ф. С.* Свободные осесимметрические колебания газопровода, контактирующего с упругой средой // За техн. прогресс. – 1980. – № 8. – С. 41–43.

48. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Воздействие движущейся нагрузки на цилиндрическую оболочку, соприкасающуюся с акустической средой // Прочность и пластичность. – М., 1971. – С. 303–307.

49. *Пожуев В. И.* Реакция упругого полого цилиндра, погруженного в сжимаемую жидкость, на подвижную волну давления // Пробл. машиностр. – К., 1984. – № 22. – С. 21–27.

50. *Пожуев В. И.* Влияние величины постоянной скорости движения на реакцию пластины, лежащей на упругом основании // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1981. – № 6. – С. 112–118.

51. *Пожуев В. И.* О возможности использования теории пластин в задачах о действии подвижных нагрузок на ледяной покров, плавающий на поверхности идеальной жидкости // Динам. и прочн. машин. – Харьков, 1987. – № 46. – С. 49–53.

52. *Селезов И. Т., Корсунский С. В.* Распространение волн вдоль упругой пластины, расположенной под свободной поверхностью жидкости // Гидромеханика. – К., 1987. – № 56. – С. 10–12.

53. *Ткаченко В. А., Яковлев В. В.* Изгибно-гравитационные волны, вызванные перемещением по льду плоского фронта давления // Гидромеханика. – К.:,1983. – № 48. – С. 27–29.

54. *Davys J. W., Hosking R. J., Sneyd A. D.* Waves due to steadily moving source on a floating ice plate. – J. Fluid Mech., 1985, 158. – P. 269–287.

55. *Коваленко Г. П., Филиппов А. П.* Действие подвижной нагрузки на пластину, лежащую на упругом полупространстве с переменными параметрами // Тр. VII Всес.конф. по теории пластинок и оболочек. – М., 1970. – С. 290–292.

56. *Пожуев В. И.* Установившиеся колебания бесконечной пластинки на упругом неоднородном слое под действием подвижной нагрузки // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск, 1975. – № 2. – С. 178–186.

57. *Пожуев В. И.* Действие подвижной нагрузки на ледяной покров, плавающий на поверхности жидкости конечной глубины // Строит. мех. и расчет сооруж. – 1984. – № 3. – С. 39–42.

58. *Байбуртян В. А.* Волноводные свойства двухслойных цилиндрических оболочек // Акуст. журнал. – 1987, 33. – № 3. – С. 562–564.

59. *Дубинин В. В.* Предельное решение задачи о нагружении полого цилиндра “бегущим” импульсом давления // Изв. вузов. Машиностр. – 1981. – № 6. – С. 3–7.

60. *Литвиненко С. Ю., Ткач А. А.* Распространение упругих волн в стенке полого цилиндра // Вопр.прикл. мат.и мат. моделир. – Днепропетровск, 1988. – С. 72–74.

61. *Рамская Е. И., Шульга Н. А.* Распространение неосесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Прикл. мех. – 1983, 19. – № 9 – С. 9–13.

62. *Дубинин В. В., Максимов Р. М., Ремизов А. В.* Пространственная задача деформирования полого бесконечного цилиндра подвижными нагрузками // Тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана. – 1985. – № 442. – С. 74–82.

63. *Дубинин В. В., Ремизов А. В.* Нагружение полого цилиндра подвижными нагрузками // Изв. вузов. машиностр. – 1983. – № 3. – С. 3–8.

64. *Yen D. H. Y., Chou C. C. J.* Response of a plate supported by a fluid half space to a moving pressure. – Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1970, 37. – № 4. – P. 848–852.

65. *Серый В. Т.* К задаче о реакции цилиндрической оболочки с заполнителем на действие пульсирующей нагрузки // Динам. и прочн. машин. – Харьков, 1985. – № 41. – С. 70–71.

66. *Гузь А. Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. мех. – 1980, 16. – № 10. – С. 10–20.

67. *Приварников А. К., Филимонов Р. П.* Действие подвижной нагрузки на существенно многослойное основание // 5-й Всес. съезд по теор. и прикл. мех., Алма-Ата, 1981. – Аннот. докл. Алма-Ата, 1981. – 295 с.

68. *Пожуев В. И.* Реакция трехслойной цилиндрической оболочки на действие неосесимметричной подвижной нагрузки // Изв. АН СССР. Мех. тверд.тела. – 1982. – № 5. – С. 161–168.

69. *Пожуев В. И.* Действие подвижной нагрузки на трехслойную цилиндрическую оболочку с неоднородным по толщине упругим заполнителем // Изв. вузов. Строит. и архит. – 1984. – № 9. – С. 40–41.

70. *Кадыров Т. К., Поташников И. А., Степаненко М. В.* Резонансное взаимодействие пластин и оболочек со средой при бегущей нагрузке // Тр.14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек. – Кутаиси, 1987. – Т. 2. – Тбилиси, 1987. – С. 15–20.

71. *Пожуев В. И.* Движение гармонической скручивающей нагрузки вдоль цилиндрической оболочки с заполнителем // Динам. и прочн. машин. – Харьков, 1987. – № 45. – С. 31–36.

72. *Datta S. K., Chakraborty T., Shan A. H.* Dynamic response of pipelines to moving loads // Earthquake Eng. and Struct. Dyn. – 1984, 12. – № 1. – P. 59–72.