

ВЫБОР И ОБОСНОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИИ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

А. И. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ «КПИ»)

Запропонований математичний опис трансляційних і ротаційних полів деформації в масиві гірських порід з використанням комплексних функцій деформації, що дозволить записати рівняння деформації в максвеллівській формі.

Традиционно твердые тела представляют как одно из возможных устойчивых состояний сплошной среды, при котором частицы вещества взаимодействуют друг с другом посредством набора полей. При этом рассматриваются четыре известных вида взаимодействия: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Теоретические и экспериментальные исследования твердых тел с точки зрения их механических свойств показали, что влиянием сильного, слабого и гравитационного взаимодействия можно пренебречь, так как упругость, пластичность, прочность и другие механические свойства обусловлены в основном электромагнитным взаимодействием между частицами вещества.

Несомненные достижения электротехники и электроники в производстве и в быту в первую очередь связаны с тем, что теория электродинамики исторически явилась первой теорией одного из фундаментальных взаимодействий заряженных частиц вещества с полем и друг с другом (Максвелл, 1864 г.). При этом для характеристики электромагнитного поля используется тензор энергии–импульса, в котором пространственные компоненты образуют так называемый максвелловский тензор напряжений [1].

В то же время при фундаментальных исследованиях деформации твердых тел ученые пошли несколько иным путем. Для характеристики деформационных свойств твердых тел традиционно используют тензор деформации Грина–Лагранжа или тензор деформации Альманси–Эйлера [2] и соответствующие уравнения типа уравнений Ламе, описывающие смещение точек твердой среды под действием внешних нагрузок. Однако логика развития науки, теоретические обобщения и экспериментальные исследования движения сплошных сред [3, 4] свидетельствуют о наличии двух типов деформационных полей при нагружении твердых тел – трансляционного поля деформации (TD-поле), связанного с поступательным движением точек сплошной среды, и ротационного поля деформации (RD-поле), связанного с вращательным движением точек среды.

Для описания смещения точек твердого тела под действием TD-поля можно записать уравнение [3]

$$(\lambda + 2\mu + \gamma)\nabla\nabla \cdot \vec{u} - (\mu + \gamma)\nabla \times \nabla \times \vec{u} + \gamma\nabla \times \vec{\phi} + \rho\vec{f} = \rho\vec{u}, \quad (1)$$

где \vec{u} – вектор смещения точек сплошной среды; λ и μ – традиционные коэффициенты Ламе; $\vec{\phi}$ – аксиальный вектор угла поворота ориентированного трехвектора e_β^α ; \vec{f} – внешние массовые силы; ρ – плотность среды.

Для RD-поля угловое смещение среды записывается в виде уравнения [3]

$$\alpha \nabla \nabla \cdot \vec{\phi} - \beta \nabla \times \nabla \times \vec{\phi} + \gamma \nabla \times \vec{U} - 2\gamma \vec{\phi} + \rho \vec{l} = \rho j \ddot{\vec{\phi}}, \quad (2)$$

где α и β – модули деформации среды; \vec{l} – удельный внешний вращательный момент; j – удельный момент инерции.

Учитывая, что оба деформационных поля в конечном итоге являются результатом изменения единого электромагнитного поля, представляется целесообразным, по мнению автора, выразить математическое описание полей деформации не в форме (1) и (2), а в форме, традиционной для электромагнитных полей, то есть в виде уравнений, подобных максвелловским.

Для достижения этих целей на промежуточном этапе необходимо ввести функцию деформации как для трансляционного, так и для ротационного деформационных полей в виде кватернионов, содержащих скалярную и векторную составляющие:

$$\tilde{U} = U + \vec{U} \text{ (TD-поле);} \quad (3)$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \vec{\Phi}, \text{ (RD-поле).} \quad (4)$$

При этом полярный и аксиальный векторы смещений через введенные функции деформации определяются из выражений

$$\vec{u} = \nabla U + \nabla \times \vec{U}; \quad (5)$$

$$\vec{\phi} = \nabla \Phi + \nabla \times \vec{\Phi}. \quad (6)$$

Подставив значения смещений точек среды в выражения (1) и (2), а также учитывая условия нормировки в виде равенства нулю дивергенций $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ и $\nabla \cdot \vec{\Phi} = 0$, получим уравнения деформационных полей в твердом теле эквивалентные уравнениям (1) и (2), но выраженные не через смещения точек среды, а через введенные функции деформации:

для TD-поля

$$(\lambda + 2\mu + \gamma) \nabla^2 U = \rho \ddot{U}, \quad (7)$$

$$(\mu + \gamma) \nabla^2 \vec{U} + \gamma \nabla \times \vec{\Phi} = \rho \ddot{\vec{U}}; \quad (8)$$

для RD-поля

$$(\alpha + \beta) \nabla^2 \Phi - 2\gamma \gamma = \rho j \ddot{\Phi}, \quad (9)$$

$$\alpha \nabla^2 \vec{\Phi} - 2\gamma \vec{\Phi} + \gamma \nabla \times \vec{U} = \rho j \ddot{\vec{\Phi}}. \quad (10)$$

Следует отметить, что уравнения (7) и (9) для скалярных величин являются обычными уравнениями Гельмгольца и решаются независимо, так как они содержат по одной неизвестной величине U и Φ .

В то же время уравнения (8) и (10) для векторных составляющих \vec{U} и $\vec{\Phi}$ представляют собой связанную систему.

Выводы

1. Деформации и напряжения в массиве горных пород характеризуются двумя типами деформационных полей – трансляционным и ротационным.

2. Несмотря на то, что деформации и напряжения в твердом теле в конечном итоге обусловлены взаимодействием заряженных частиц через электромагнитное поле, в традиционных уравнениях типа уравнений Ламе или в предлагаемых уравнениях (1) и (2) это взаимодействие никак не отражено.

3. Для установления связи между электромагнитным и механическим взаимодействиями на промежуточном этапе вводятся комплексные функции деформации (кватернионы), что позволяет записать исходные уравнения (1) и (2) для смещений через введенные функции в форме, дающей возможность преобразовать их в уравнения максвелловского типа.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля: Учеб. пособие. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

2. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.

3. Крючков А. И. Обоснование и анализ уравнений полей деформации в массиве горных пород // Вісник Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. Серія “Гірництво”: Збірник наукових праць. – Київ: НТУУ “КПІ”. – 2003. – Вип. 8. – С. 3–8.

4. Эринген А. К. Единая теория термомеханических материалов. Механика. – М.: Мир. – № 1. – 1967. – С. 135–157.