УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РОТАЦИОННОГО ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ ТВЕРДОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ФОРМЕ

А. И. Крючков, канд. техн. наук (НТУУ «КПИ»)

Деформація гірської породи розглядається як сукупність трансляційного і ротаційного полів деформації. Показано, що поля деформації математично записуються у вигляді диференціальних рівнянь полів максвеллівського типу. Для ротаційного поля деформації наведено відповідні рівняння і виконано їх аналіз.

В работе [1] было предложено рассматривать деформированное состояние твердой сплошной среды, в том числе и горных пород, как совокупность деформационных полей двух типов – трансляционного (TD-поле) и ротационного (RD-поле), отражающих соответственно поступательное и вращательное движения среды.

Для математического описания этих полей предложены уравнения типа уравнений Ляме [2] с использованием традиционного тензора деформации Грина–Лагранжа или тензора деформации Альманси–Эйлера:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

где u_i – компонент смещения точек среды; x_i – пространственная координата.

Для характеристики электромагнитного поля принимают маквелловский тензор напряженностей, существенно отличающийся от эйлеровского тензора (1) как по своей сущности, так и по форме:

$$F^{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где E_i – проекция на i-ю ось координат вектора электрической напряженности; B_i – проекция на i-ю ось координат вектора магнитной индукции.

Учитывая, что полноценной теории деформации и разрушения твердой сплошной среды до сих пор не создано, а электромагнитное взаимодействие имеет прекрасно работающую теорию динамики электромагнитных полей, представляется целесообразным выразить математическое описание полей деформации твердой сплошной среды не в форме уравнений типа Ляме [1], а в форме, традиционной для электромагнитных полей, то есть в виде уравнений, подобных максвелловским. Такой подход кажется более естественным, поскольку в конечном итоге поле деформации твердой сплошной среды представляет собой изменения электромагнитного поля в пространстве и времени. Кроме того, при таком подходе для полей деформации могут применяться общие принципы описания полей в классическом смысле, основанные на методах Лагранжа или Гамильтона с учетом теории групп.

Исходя из этой идеи, в статье поставлена цель – рассмотреть ротационное поле деформации как классическое поле максвелловского типа и получить соответствующие уравнения, описывающие его динамику.

Для достижения этой цели на промежуточном этапе исследования были введены комплексные функции деформации (кватернионы) [2] как для трансляционного, так и для ротационного полей, содержащих скалярную и векторную составляющие

$$\tilde{U} = U + \vec{U} \quad \text{(TD-поле);} \tag{3}$$

$$\tilde{\mathcal{\Phi}} = \mathcal{\Phi} + \vec{\mathcal{\Phi}} \quad \text{(RD-поле).} \tag{4}$$

Полярный и аксиальный векторы смещений точек среды определяются через введенные функции деформации из выражений

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \nabla U \times \vec{U}; \tag{5}$$

$$\vec{\varphi}(\vec{r},t) = \nabla \mathcal{\Phi} + \nabla \times \vec{\mathcal{\Phi}}. \tag{6}$$

Уравнения RD-поля в твердой сплошной среде, выраженные через комплексные функции деформации, можно представить в виде [2]:

$$(\alpha + \beta)\nabla^2 \mathcal{\Phi} - 2\gamma \mathcal{\Phi} = \rho j \mathcal{\Phi}; \tag{7}$$

$$\alpha \nabla^2 \vec{\mathcal{\Phi}} - 2\gamma \vec{\mathcal{\Phi}} + \gamma \nabla \times \vec{\mathcal{U}} = \rho j \ddot{\vec{\mathcal{\Phi}}}, \tag{8}$$

где α, β, γ – модули деформации для ротационного поля; ρ – плотность среды; j – радиус осевого момента инерции; $\vec{\mathcal{\Phi}}$ и $\vec{U}$ – векторные функции деформации.

Рассмотрим уравнение (7) для скалярного поля. Введем понятие векторного потенциала для ротационного поля деформации в твердой среде:

$$\vec{\mathcal{A}} = \nabla \mathcal{\Phi} + \nabla \times \vec{\mathcal{\Phi}} = \vec{\mathcal{A}}_1 + \vec{\mathcal{A}}_2, \tag{9}$$

где $\vec{\mathcal{A}}_1$ и $\vec{\mathcal{A}}_2$ – векторные потенциалы от скалярной и векторной составляющих ротационного поля деформации.

При этом полярную напряженность рассматриваемого поля деформации можно записать как

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \mathcal{\Phi}) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{\mathcal{\Phi}}) = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2. \tag{10}$$

Учитывая вихревой характер ротационного поля, запишем:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}} = \nabla \times \left(\nabla \mathcal{\phi} + \nabla \times \vec{\mathcal{\phi}}\right) = \nabla \times \nabla \mathcal{\phi} + \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{\phi}}.$$

Поскольку $\nabla \times \nabla \mathcal{\phi} = 0$, то вектор $\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{\phi}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_2 = \vec{\mathcal{B}}_2$ можно назвать аксиальной индукцией ротационного поля. Тогда величину $\vec{\mathcal{E}}/C_4^2 = \vec{\mathcal{D}}$, в свою очередь, назовем индукцией ротационного поля.

Преобразование уравнений поля начнем с векторного уравнения (8). Для этого возьмем операцию ротор от указанного уравнения

$$\nabla \times \left(\nabla^2 \vec{\mathcal{\phi}}\right) - \nabla \times \left(\frac{2\omega^2}{C_4^2} \vec{\mathcal{\phi}}\right) + \nabla \times \left(\frac{\omega^2}{C_4^2} \nabla \times \vec{U}\right) = \frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla \times \vec{\mathcal{\phi}}\right), \tag{11}$$

где $C_4 = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\rho \cdot j}}$ – скорость волн векторного ротационного поля; $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma}{\rho \cdot j}}$ – частота колебаний поля кручения.

Известно [3], что $\nabla^2 \vec{\mathcal{\phi}} = \nabla\left(\nabla \vec{\mathcal{\phi}}\right) - \nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{\phi}}$, но в нашем случае $\nabla\, \nabla \cdot \vec{\mathcal{\phi}} = 0$ [2], тогда $\nabla^2 \vec{\mathcal{\phi}} = -\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{\phi}} = -\nabla \times \vec{\mathcal{A}}_2 = -\vec{\mathcal{B}}_2$.

По аналогии с электромагнитным полем выражение

$$\vec{\mathcal{M}}_\varphi = \frac{2\omega^2 \vec{\mathcal{\phi}}}{C_4^2} \tag{12}$$

принимаем за аксиальный момент ротационного поля, подобный вектору намагничивания в электродинамике сплошной среды. Тогда выражение

$$\vec{\mathcal{M}}_u = \frac{\omega^2}{C_4^2}\left(\nabla \times \vec{U}\right) \tag{13}$$

также можно считать аксиальным моментом, но вызван он наличием трансляционного поля деформации.

Если аналогию с электромагнитным полем проводить и далее, то наряду с указанными моментами необходимо ввести соответствующие им аксиальные токи:

$$\vec{j}_{\varphi 2} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{\varphi 2}; \tag{14}$$

$$\vec{j}_u = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_u. \tag{15}$$

После некоторой перегруппировки выражение (11) запишем в виде

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_2 = \vec{j}_{\varphi 2} - \vec{j}_u + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_2}{\partial t}, \tag{16}$$

где в левой части уравнения записан вихрь для аксиальной напряженности векторной составляющей ротационного поля деформации. Плотности аксиальных токов $\vec{j}_{\varphi 2}$ для ротационного поля $\vec{j}_u$ и для трансляционного поля носят вихревой характер.

Производная по времени от вектора полярной индукции $\vec{\mathcal{D}}_2 = -\frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{\varphi})$ представляет собой плотность тока смещения, который, так же как и предыдущие два тока, порождают вихревое аксиальное ротационное поле с индукцией $\vec{\mathcal{B}}_2$. Полученное уравнение (16) полностью эквивалентно исходному уравнению (8).

В отличие от уравнения (8), в уравнение (7) входит скалярная составляющая φ ротационного поля. Возьмем градиент от указанного уравнения

$$\left(1 + \frac{C_5^2}{C_4^2}\right)\nabla^2(\nabla\varphi) - \frac{2\omega^2}{C_4^2}(\nabla\varphi) = \frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t^2}(\nabla\varphi), \tag{17}$$

где $C_5 = \sqrt{\frac{\beta}{\rho j}}$ – скорость волн скалярного ротационного поля деформации.

С учетом значения $\nabla\varphi = \vec{\mathcal{A}}_1$ (9) для первого члена уравнения (17) получим по аналогии с предыдущим случаем

$$\left(1 + \frac{C_5^2}{C_4^2}\right)\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_1 = -\nabla \times \left[\left(1 + \frac{C_5^2}{C_4^2}\right)\nabla \times \vec{\mathcal{A}}_1\right] = -\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_1 .$$

Вторая составляющая уравнения (17) связана в конечном итоге с перераспределением в пространстве диполей частиц среды и изменением их сцепления.

Такое явление аналогично электромагнитной поляризации и ею обусловлено. В нашем случае выражение $\frac{2\omega}{C_4^2}\nabla\varphi = \frac{2}{C_4^2}\omega\vec{\mathcal{A}}_1 = \vec{\mathcal{P}}_1$ примем за плотность полярного момента, который связан с полярным током зависимостью

$$\vec{j}_{\text{p}} = \omega\vec{\mathcal{P}}_1 . \tag{18}$$

Наконец, временную составляющую поля запишем в виде

$$\frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial^2(\nabla\varphi)}{\partial t^2} = \frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{C_4^2} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}_1}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_1}{\partial t} .$$

Тогда уравнению (17) после некоторой перегруппировки логично придать вид

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}}_1 = \vec{j}_{\text{p}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}_1}{\partial t} . \tag{19}$$

Сложив попарно правые и левые части уравнения (16) и (19), получим

$$\nabla \times \vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{\varphi} - \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{u} + \omega \vec{\mathcal{P}}_{\varphi} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}, \qquad (20)$$

где $\vec{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}}_1 + \vec{\mathcal{B}}_2$ – суммарное значение аксиальной индукции ротационного поля; $\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{D}}_1 + \vec{\mathcal{D}}_2$ – суммарное значение полярной индукции ротационного поля; $\vec{j}_{\varphi} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{\varphi}$ – аксиальный ток ротационного поля; $\vec{j}_{u} = \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{u}$ – аксиальный ток трансляционного поля; $\omega \vec{\mathcal{P}}_{\varphi}$ – полярный ток ротационного поля.

Полученное уравнение (20) описывает токи и напряженности полей в деформированной твердой среде. Токи и соответствующие им заряды здесь понимаются в смысле токов Нётер [4].

Возьмем дивергенцию от последнего уравнения (20)

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathcal{B}}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{\varphi} - \nabla \times \vec{\mathcal{M}}_{u}\right) + \nabla \cdot \left(\omega\, \vec{\mathcal{P}}_{\varphi}\right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}\right).$$

В этом выражении $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathcal{B}}\right) = 0$, дивергенция от аксиальных токов также равна нулю. Дивергенция от полярного момента $\vec{\mathcal{P}}_{\varphi}$ связана с зарядом ρ_{φ}. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_{\varphi} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}\right) = 0$$

или окончательно

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_{\varphi}. \qquad (21)$$

Как видим, уравнения (20) и (21) действительно имеют форму записи классического максвелловского поля, но физический смысл напряженностей, индукции, токов и зарядов несколько иной, чем в теории электродинамики.

Выводы

1. Теоретические обоснования, экспериментальные исследования и общая логика развития науки о движении сплошных сред свидетельствуют о наличии двух типов деформационных полей при нагружении твердой сплошной среды – трансляционного поля деформации (TD-поля), связанного с поступательным движением точек среды, и ротационного поля деформации (RD-поля), связанного с вращательным движением точек среды.

2. Глубокое единство полей деформации и электромагнитных полей для твердой сплошной среды позволило выдвинуть предположение о представлении полей деформации как полей максвелловского типа.

3. Для установления взаимосвязи между электромагнитным и механическим взаимодействием введены векторно-скалярные функции деформации, что позволяет записать уравнения для смещений точек среды через введенные комплексные функции.

4. Применение максвелловской концепции для полей деформации твердой сплошной среды позволило записать уравнения ротационного поля деформации в виде классических полевых уравнений (20) и (21) в форме Максвелла.

5. В твердых телах присутствуют неэлектрические токи и заряды в смысле Нётер, физическая интерпретация которых будет установлена в последующих публикациях.

6. Особенностью приведенных уравнений движения ротационного поля является то, что в них присутствует ток $\vec{j}_u$, обусловленный наличием поля другого типа – трансляционного.

1. *Крючков А. И.* Обоснование и анализ уравнений полей деформации в массиве горных пород // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія "Гірництво": Зб. наук. праць. – К.: НТУУ "КПІ". – 2003. – Вип. 8. – С. 3–8.

2. *Крючков А. И.* Выбор и обоснование комплексных функций для описания полей деформации в массиве горных пород // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія "Гірництво": Зб. наук. праць. – К.: НТУУ "КПІ". – 2003. – Вип. 9. – С. 36–38.

3. *Говорков В. А.* Электрические и магнитные поля. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1968. – 488 с.

4. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля: Учебное пособие. – 7-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 512 с.